2022 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号框，回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $M=\{2,4,6,8,10\},N=\{x|-1<x<6\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{2,4\}$　　B. $\{2,4,6\}$　　C. $\{2,4,6,8\}$　　D. $\{2,4,6,8,10\}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据集合的交集运算即可解出.

【详解】因为 $M=\{2,4,6,8,10\}$，$N=\{x|-1<x<6\}$，所以 $M\cap N=\{2,4\}$.

故选：A.

2. 设 $(1+2\mathrm{i})a+b=2\mathrm{i}$，其中 a,b 为实数，则（　　）

A. $a=1,b=-1$　　B. $a=1,b=1$　　C. $a=-1,b=1$　　D. $a=-1,b=-1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数代数形式的运算法则以及复数相等的概念即可解出.

【详解】因为 $a,b\in\mathbf{R}$，$(a+b)+2a\mathrm{i}=2\mathrm{i}$，所以 $a+b=0,2a=2$，解得：$a=1,b=-1$.

故选：A.

3. 已知向量 $\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(-2,4)$，则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】先求得$\vec{a}-\vec{b}$，然后求得$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

【详解】因为$\vec{a}-\vec{b}=(2,1)-(-2,4)=(4,-3)$，所以$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

故选：D

4. 分别统计了甲、乙两位同学 16 周的各周课外体育运动时长（单位：h），得如下茎叶图：

甲		乙
6 1	5.	
8 5 3 0	6.	3
7 5 3 2	7.	4 6
6 4 2 1	8.	1 2 2 5 6 6 6 6
4 2	9.	0 2 3 8
	10.	1

则下列结论中错误的是（　　）

A. 甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为 7.4

B. 乙同学周课外体育运动时长的样本平均数大于 8

C. 甲同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值大于 0.4

D. 乙同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值大于 0.6

【答案】C

【解析】

【分析】结合茎叶图、中位数、平均数、古典概型等知识确定正确答案.

【详解】对于 A 选项，甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为$\dfrac{7.3+7.5}{2}=7.4$，A 选项结论正确.

对于 B 选项，乙同学课外体育运动时长的样本平均数为：

$$\frac{6.3+7.4+7.6+8.1+8.2+8.2+8.5+8.6+8.6+8.6+8.6+9.0+9.2+9.3+9.8+10.1}{16}=8.50625>8.$$

B 选项结论正确.

对于 C 选项，甲同学周课外体育运动时长大于8的概率的估计值$\dfrac{6}{16}=0.375<0.4$，

C 选项结论错误.

对于 D 选项，乙同学周课外体育运动时长大于8的概率的估计值$\dfrac{13}{16}=0.8125>0.6$，

D 选项结论正确.

故选：C

5. 若x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\quad 2,\\ x+2y\quad 4,\\ y\quad 0,\end{cases}$则$z=2x-y$的最大值是（　　）

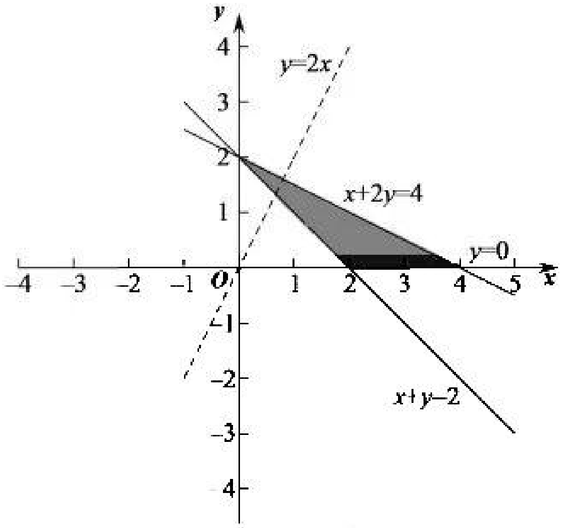
A. -2　　B. 4　　C. 8　　D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】作出可行域，数形结合即可得解.

【详解】由题意作出可行域，如图阴影部分所示，



转化目标函数 $z=2x-y$ 为 $y=2x-z$，

上下平移直线 $y=2x-z$，可得当直线过点 $(4,0)$ 时，直线截距最小，z 最大，

所以 $z_{\max}=2\times4-0=8$.

故选：C.

6. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3,0)$，若 $|AF|=|BF|$，则 $|AB|=$（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据抛物线上的点到焦点和准线的距离相等，从而求得点A的横坐标，进而求得点A坐标，即可得到答案.

【详解】由题意得，$F(1,0)$，则 $|AF|=|BF|=2$，

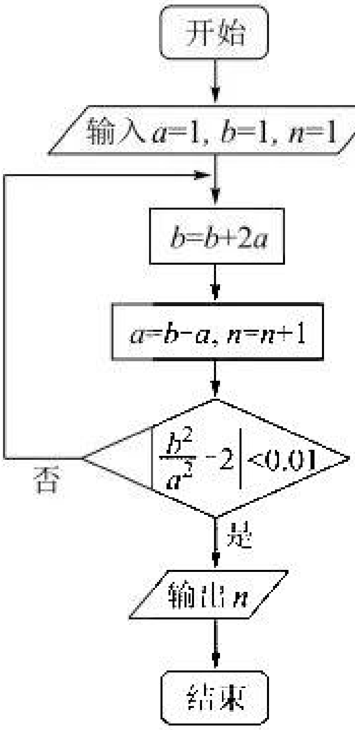
即点A到准线 $x=-1$ 的距离为2，所以点A的横坐标为 $-1+2=1$，

不妨设点A在 x 轴上方，代入得，$A(1,2)$，

所以 $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$.

故选：B

7. 执行下边的程序框图，输出的 $n=$（　　）



A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】根据框图循环计算即可.

【详解】执行第一次循环，$b=b+2a=1+2=3$，

$a=b-a=3-1=2, n=n+1=2$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{3^2}{2^2}-2\right|=\frac{1}{4}>0.01$；

执行第二次循环，$b=b+2a=3+4=7$，

$a=b-a=7-2=5, n=n+1=3$，

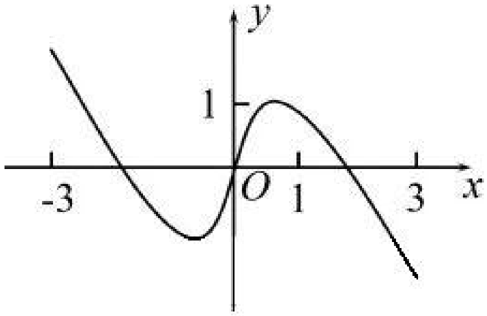
$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{7^2}{5^2}-2\right|=\frac{1}{25}>0.01$；

$a=b-a=17-5=12, n=n+1=4$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{17^2}{12^2}-2\right|=\frac{1}{144}<0.01$，此时输出 $n=4$.

故选：B

8. 如图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-3,3]$ 的大致图像，则该函数是（　　）



A. $y=\frac{-x^3+3x}{x^2+1}$　　B. $y=\frac{x^3-x}{x^2+1}$　　C. $y=\frac{2x\cos x}{x^2+1}$　　D. $y=\frac{2\sin x}{x^2+1}$

【答案】A

【解析】

【分析】由函数图像的特征结合函数的性质逐项排除即可得解.

【详解】设 $f\left(x\right)=\frac{x^3-x}{x^2+1}$，则 $f\left(1\right)=0$，故排除 B;

设 $h\left(x\right)=\frac{2x\cos x}{x^2+1}$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$0<\cos x<1$，

所以 $h\left(x\right)=\frac{2x\cos x}{x^2+1}<\frac{2x}{x^2+1}\le 1$，故排除 C;

设 $g\left(x\right)=\frac{2\sin x}{x^2+1}$，则 $g\left(3\right)=\frac{2\sin 3}{10}>0$，故排除 D.

故选：A.

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 AB, BC 的中点，则（　　）

A. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1　　B. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

C. 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1AC　　D. 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1C_1D

【答案】A

【解析】

【分析】证明 $EF\perp$ 平面 BDD_1，即可判断 A；如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，设 $AB=2$，分别求出平面 B_1EF，A_1BD，A_1C_1D 的法向量，根据法向量的位置关系，即可判断 BCD.

【详解】解：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

$AC\perp BD$ 且 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $EF\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EF\perp DD_1$，

因为 E,F 分别为 AB,BC 的中点，

所以 $EF\parallel AC$，所以 $EF\perp BD$，

又 $BD\cap DD_1=D$，

所以 $EF\perp$ 平面 BDD_1，

又 $EF\subset$ 平面 B_1EF，

所以平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1，故 A 正确；

如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，设 $AB=2$，

则 $B_1(2,2,2),E(2,1,0),F(1,2,0),B(2,2,0),A_1(2,0,2),A(2,0,0),C(0,2,0)$，

$C_1(0,2,2)$，

则 $\overline{EF}=(-1,1,0),\overline{EB_1}=(0,1,2)$，$\overline{DB}=(2,2,0),\overline{DA_1}=(2,0,2)$，

$\overline{AA_1}=(0,0,2),\overline{AC}=(-2,2,0),\overline{A_1C_1}=(-2,2,0)$，

设平面 B_1EF 的法向量为 $\overline{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overline{EF}=-x_1+y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overline{EB_1}=y_1+2z_1=0\end{cases}$，可取 $\overline{m}=(2,2,-1)$，

同理可得平面 A_1BD 的法向量为 $\overline{n_1}=(1,-1,-1)$，

平面 A_1AC 的法向量为 $\overline{n_2}=(1,1,0)$，

平面 A_1C_1D 的法向量为 $\overline{n_3}=(1,1,-1)$，

则 $\overline{m}\cdot\overline{n_1}=2-2+1=1\neq 0$，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1BD 不垂直，故 B 错误；

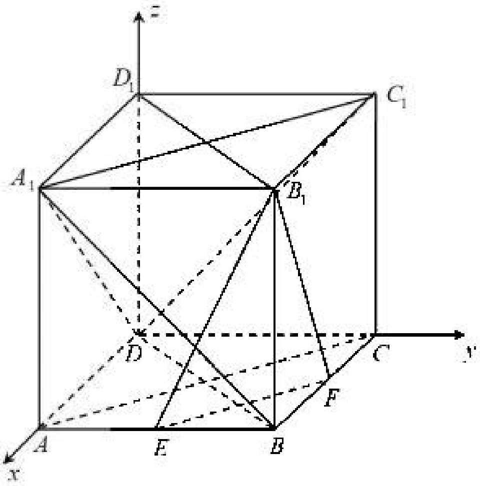
因为$\overrightarrow{m}$与$\overrightarrow{n_2}$不平行，

所以平面B_1EF与平面A_1AC不平行，故C错误；

因为$\overrightarrow{m}$与$\overrightarrow{n_3}$不平行，

所以平面B_1EF与平面A_1C_1D不平行，故D错误，

故选：A.



10. 已知等比数列$\{a_n\}$的前3项和为168，$a_2-a_5=42$，则$a_6=$（　　）

A. 14　　B. 12　　C. 6　　D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q,q\neq 0$，易得$q\neq 1$，根据题意求出首项与公比，再根据等比数列的通项即可得解.

【详解】解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q,q\neq 0$，

若$q=1$，则$a_2-a_5=0$，与题意矛盾，

所以$q\neq 1$，

则$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=\dfrac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}=168 \\ a_2-a_5=a_1q-a_1q^4=42 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1=96 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$，

所以$a_6=a_1q^5=3$.

故选：D.

11. 函数 $f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 的最小值、最大值分别为（　　）

A. $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$　　B. $-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}$　　C. $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2$　　D. $-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2$

【答案】D

【解析】

【分析】利用导数求得 $f(x)$ 的单调区间，从而判断出 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的最小值和最大值.

【详解】$f'(x)=-\sin x+\sin x+(x+1)\cos x=(x+1)\cos x$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 上 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 单调递增；

在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调递减，

又 $f(0)=f(2\pi)=2$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+2$，$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)+1=-\frac{3\pi}{2}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的最小值为 $-\frac{3\pi}{2}$，最大值为 $\frac{\pi}{2}+2$.

故选：D

12. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】先证明当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时，底面 $ABCD$ 面积最大值为 $2r^2$，进而得到四棱锥体积表达式，再利用均值定理去求四棱锥体积的最大值，从而得到当该四棱锥的体积最大时其高的值.

【详解】设该四棱锥底面为四边形 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 所在小圆半径为 r，

设四边形 $ABCD$ 对角线夹角为 α，

则 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\alpha\le\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\le\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r=2r^2$

（当且仅当四边形 $ABCD$ 为正方形时等号成立）

即当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时，底面 $ABCD$ 面积最大值为 $2r^2$

又 $r^2+h^2=1$

则 $V_{O-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot 2r^2\cdot h=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{r^2\cdot r^2\cdot 2h^2}\le\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{r^2+r^2+2h^2}{3}\right)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{27}$

当且仅当 $r^2=2h^2$ 即 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，

故选：C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $2S_3=3S_2+6$，则公差 $d=$_______.

【答案】2

【解析】

【分析】转化条件为 $2(a_1+2d)=2a_1+d+6$，即可得解.

【详解】由 $2S_3=3S_2+6$ 可得 $2(a_1+a_2+a_3)=3(a_1+a_2)+6$，化简得 $2a_3=a_1+a_2+6$，

即 $2(a_1+2d)=2a_1+d+6$，解得 $d=2$.

故答案为：2.

14. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为____________.

【答案】$\frac{3}{10}$##0.3

【解析】

【分析】根据古典概型计算即可

【详解】从 5 名同学中随机选 3 名的方法数为 $C_5^3=10$

甲、乙都入选的方法数为 $C_3^1=3$，所以甲、乙都入选的概率 $P=\frac{3}{10}$

故答案为：$\frac{3}{10}$

15. 过四点 $(0,0),(4,0),(-1,1),(4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为____________.

【答案】$(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 或 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 或 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$ 或

案

$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$；

【解析】

【分析】设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，根据所选点的坐标，得到方程组，解得即可；

【详解】解：依题意设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

若过$(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，则$\begin{cases}F=0\\16+4D+F=0\\1+1-D+E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=0\\D=-4\\E=-6\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-4x-6y=0$，即$(x-2)^2+(y-3)^2=13$；

若过$(0,0)$，$(4,0)$，$(4,2)$，则$\begin{cases}F=0\\16+4D+F=0\\16+4+4D+2E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=0\\D=-4\\E=-2\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-4x-2y=0$，即$(x-2)^2+(y-1)^2=5$；

若过$(0,0)$，$(4,2)$，$(-1,1)$，则$\begin{cases}F=0\\1+1-D+E+F=0\\16+4+4D+2E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=0\\D=-\frac{8}{3}\\E=-\frac{14}{3}\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$，即$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$；

若过$(-1,1)$，$(4,0)$，$(4,2)$，则$\begin{cases}1+1-D+E+F=0\\16+4D+F=0\\16+4+4D+2E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=-\frac{16}{5}\\D=-\frac{16}{5}\\E=-2\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$，即$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$；

故答案为：$(x-2)^2+(y-3)^2=13$或$(x-2)^2+(y-1)^2=5$或$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$或

$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$；

16. 若$f\left(x\right)=\ln\left|a+\dfrac{1}{1-x}\right|+b$是奇函数，则$a=$_____，$b=$______.

【答案】　①. $-\dfrac{1}{2}$；　②. $\ln 2$.

【解析】

【分析】根据奇函数的定义即可求出.

【详解】因为函数$f\left(x\right)=\ln\left|a+\dfrac{1}{1-x}\right|+b$为奇函数，所以其定义域关于原点对称.

由$a+\dfrac{1}{1-x}\neq 0$可得，$\left(1-x\right)\left(a+1-ax\right)\neq 0$，所以$x=\dfrac{a+1}{a}=-1$，解得：$a=-\dfrac{1}{2}$，即函数的定义域为

$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，再由$f\left(0\right)=0$可得，$b=\ln 2$．即$f\left(x\right)=\ln\left|-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1-x}\right|+\ln 2=\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$，

在定义域内满足$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，符合题意.

故答案为：$-\dfrac{1}{2}$；$\ln 2$.

三、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

17. 记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C\sin\left(A-B\right)=\sin B\sin\left(C-A\right)$.

（1）若$A=2B$，求C；

（2）证明：$2a^2=b^2+c^2$

【答案】（1）$\dfrac{5\pi}{8}$；

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）根据题意可得，$\sin C=\sin\left(C-A\right)$，再结合三角形内角和定理即可解出；

（2）由题意利用两角差的正弦公式展开得

$\sin C\left(\sin A\cos B-\cos A\sin B\right)=\sin B\left(\sin C\cos A-\cos C\sin A\right)$，再根据正弦定理，余弦定理化简即可证出.

【小问1详解】

由$A=2B$，$\sin C\sin\left(A-B\right)=\sin B\sin\left(C-A\right)$可得，$\sin C\sin B=\sin B\sin\left(C-A\right)$，而$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\sin B\in(0,1)$，即有$\sin C=\sin(C-A)>0$，而$0<C<\pi,0<C-A<\pi$，显然$C\neq C-A$，所以，

$C+C-A=\pi$，而$A=2B$，$A+B+C=\pi$，所以$C=\dfrac{5\pi}{8}$.

【小问2详解】

由$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$可得，

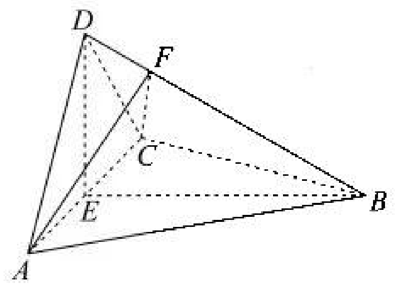
$\sin C(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=\sin B(\sin C\cos A-\cos C\sin A)$，再由正弦定理可得，

$ac\cos B-bc\cos A=bc\cos A-ab\cos C$，然后根据余弦定理可知，

$\dfrac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)-\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$，化简得：

$2a^2=b^2+c^2$，故原等式成立.

18. 如图，四面体$ABCD$中，$AD\perp CD,AD=CD,\angle ADB=\angle BDC$，$E$为$AC$的中点.



（1）证明：平面$BED\perp$平面ACD；

（2）设$AB=BD=2,\angle ACB=60^\circ$，点$F$在$BD$上，当$\triangle AFC$的面积最小时，求三棱锥$F-ABC$的体积.

【答案】（1）证明详见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】（1）通过证明$AC\perp$平面BED来证得平面$BED\perp$平面ACD.

（2）首先判断出三角形AFC的面积最小时F点的位置，然后求得F到平面ABC的距离，从而求得三棱锥$F-ABC$的体积.

【小问1详解】

由于$AD=CD$，E是AC的中点，所以$AC\perp DE$.

由于$\begin{cases} AD = CD \\ BD = BD \\ \angle ADB = \angle CDB \end{cases}$，所以$\triangle ADB \cong \triangle CDB$，

所以$AB = CB$，故$AC \perp BD$，

由于$DE \cap BD = D$，DE, BD Ì 平面BED，

所以$AC \perp$平面BED，

由于$AC \subset$平面ACD，所以平面$BED \perp$平面ACD.

【小问 2 详解】

依题意$AB = BD = BC = 2$，$\angle ACB = 60°$，三角形ABC是等边三角形，

所以$AC = 2, AE = CE = 1, BE = \sqrt{3}$，

由于$AD = CD, AD \perp CD$，所以三角形ACD是等腰直角三角形，所以$DE = 1$.

$DE^2 + BE^2 = BD^2$，所以$DE \perp BE$，

由于$AC \cap BE = E$，$AC, BE \subset$平面ABC，所以$DE \perp$平面ABC.

由于$\triangle ADB \cong \triangle CDB$，所以$\angle FBA = \angle FBC$，

由于$\begin{cases} BF = BF \\ \angle FBA = \angle FBC \\ AB = CB \end{cases}$，所以$\triangle FBA \cong \triangle FBC$，

所以$AF = CF$，所以$EF \perp AC$，

由于$S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot EF$，所以当$EF$最短时，三角形$AFC$的面积最小值.

过E作$EF \perp BD$，垂足为F，

在$\mathrm{Rt}\triangle BED$中，$\frac{1}{2} \cdot BE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot EF$，解得$EF = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

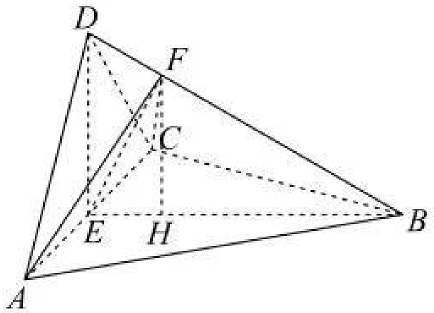
所以$DF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}, BF = 2 - DF = \frac{3}{2}$，

所以$\frac{BF}{BD} = \frac{3}{4}$.

过F作$FH \perp BE$，垂足为H，则$FH // DE$，所以$FH \perp$平面ABC，且$\frac{FH}{DE} = \frac{BF}{BD} = \frac{3}{4}$，

所以$FH = \frac{3}{4}$，

所以$V_{F-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot FH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



19. 某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山．为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了10棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位：m^2）和材积量（单位：m^3），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038, \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$．

（1）估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到0.01）；

（3）现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为$186m^2$．已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比．利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值．

附：相关系数 $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}, \sqrt{1.896} \approx 1.377$．

【答案】（1）$0.06m^2$；$0.39m^3$

（2）0.97

（3）$1209m^3$

【解析】

【分析】（1）计算出样本的一棵根部横截面积的平均值及一棵材积量平均值，即可

均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）代入题给相关系数公式去计算即可求得样本的相关系数值；

（3）依据树木的材积量与其根部横截面积近似成正比，列方程即可求得该林区这种树木的总材积量的估计值．

【小问 1 详解】

样本中 10 棵这种树木的根部横截面积的平均值 $\overline{x}=\dfrac{0.6}{10}=0.06$

样本中 10 棵这种树木的材积量的平均值 $\overline{y}=\dfrac{3.9}{10}=0.39$

据此可估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积为 $0.06\mathrm{m}^2$，

平均一棵的材积量为 $0.39\mathrm{m}^3$

【小问 2 详解】

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum_{i=1}^{10}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^{\ 2}-10\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{10}y_i^{\ 2}-10\overline{y}^2\right)}}$$

$$=\frac{0.2474-10\times0.06\times0.39}{\sqrt{(0.038-10\times0.06^2)(1.6158-10\times0.39^2)}}=\frac{0.0134}{\sqrt{0.0001896}}\approx\frac{0.0134}{0.01377}\approx0.97$$

则 $r\approx0.97$

【小问 3 详解】

设该林区这种树木的总材积量的估计值为 $Y\mathrm{m}^3$，

又已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比，

可得 $\dfrac{0.06}{0.39}=\dfrac{186}{Y}$，解之得 $Y=1209\mathrm{m}^3$．

则该林区这种树木的总材积量估计为 $1209\mathrm{m}^3$

20. 已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{1}{x}-(a+1)\ln x$．

（1）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的最大值；

（2）若 $f(x)$ 恰有一个零点，求 a 的取值范围．

【答案】（1）-1

（2）$(0,+\infty)$

【解析】

【分析】（1）由导数确定函数的单调性，即可得解；

（2）求导得 $f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$，按照 $a\le 0$、$0<a<1$ 及 $a>1$ 结合导数讨论函数的单调性，求得函数的极值，即可得解.

【小问 1 详解】

当 $a=0$ 时，$f(x)=-\dfrac{1}{x}-\ln x, x>0$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=-1$；

【小问 2 详解】

$f(x)=ax-\dfrac{1}{x}-(a+1)\ln x, x>0$，则 $f'(x)=a+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{a+1}{x}=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$，

当 $a\le 0$ 时，$ax-1\le 0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=a-1<0$，此时函数无零点，不合题意；

当 $0<a<1$ 时，$\dfrac{1}{a}>1$，在 $(0,1),\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

在 $\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

又 $f(1)=a-1<0$，当 x 趋近正无穷大时，$f(x)$ 趋近于正无穷大，

所以 $f(x)$ 仅在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 有唯一零点，符合题意；

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\ge 0$，所以 $f(x)$ 单调递增，又 $f(1)=a-1=0$，

所以 $f(x)$ 有唯一零点，符合题意；

当 $a>1$ 时，$\dfrac{1}{a}<1$，在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right),(1,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

在 $\left(\dfrac{1}{a},1\right)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；此时 $f(1)=a-1>0$，

又 $f\left(\frac{1}{a^n}\right)=\frac{1}{a^{n-1}}-a^n+n(a+1)\ln a$，当 n 趋近正无穷大时，$f\left(\frac{1}{a^n}\right)$ 趋近负无穷，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 有一个零点，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 无零点，

所以 $f(x)$ 有唯一零点，符合题意；

综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是利用导数研究函数的极值与单调性，把函数零点问题转化为函数的单调性与极值的问题.

21. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2),B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 两点.

（1）求 E 的方程；

（2）设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$．证明：直线 HN 过定点.

【答案】（1）$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

（2）$(0,-2)$

【解析】

【分析】（1）将给定点代入设出的方程求解即可；

（2）设出直线方程，与椭圆 C 的方程联立，分情况讨论斜率是否存在，即可得解.

【小问 1 详解】

解：设椭圆 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1$，过 $A(0,-2),B\left(\frac{3}{2},-1\right)$，

则 $\begin{cases}4n=1\\ \frac{9}{4}m+n=1\end{cases}$，解得 $m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{1}{4}$，

所以椭圆 E 的方程为：$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

$A(0,-2),B(\frac{3}{2},-1)$，所以 $AB:y+2=\frac{2}{3}x$，

①若过点$P(1,-2)$的直线斜率不存在，直线$x=1$.代入$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，

可得$M(1,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，$N(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$，代入$AB$方程$y=\frac{2}{3}x-2$，可得

$T(\sqrt{6}+3,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，由$\overline{MT}=\overline{TH}$得到$H(2\sqrt{6}+5,\frac{2\sqrt{6}}{3})$.求得$HN$方程：

$y=(2-\frac{2\sqrt{6}}{3})x-2$，过点$(0,-2)$.

②若过点$P(1,-2)$的直线斜率存在，设$kx-y-(k+2)=0,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}kx-y-(k+2)=0\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得$(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$，

可得$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4}\\ x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4}\end{cases}$，$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4}\\ y_2y_2=\frac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2+4}\end{cases}$，

且$x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}$(*)

联立$\begin{cases}y=y_1\\ y=\frac{2}{3}x-2\end{cases}$，可得$T(\frac{3y_1}{2}+3,y_1),H(3y_1+6-x_1,y_1)$.

可求得此时$HN:y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，

将$(0,-2)$，代入整理得$2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$，

将(*)代入，得$24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$,

显然成立，

综上，可得直线HN过定点$(0,-2)$.

【点睛】求定点、定值问题常见的方法有两种：

①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

②直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中选定一题作答，并用　　　　　　　　将

所选题目对应的题号方框涂黑．按所涂题号进行评分，不涂、多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分．

[选修 4—4：坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos 2t \\ y=2\sin t \end{cases}$，（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+m=0$．

（1）写出 l 的直角坐标方程；

（2）若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围．

【答案】（1）$\sqrt{3}x+y+2m=0$

（2）$-\dfrac{19}{12}\le m\le\dfrac{5}{2}$

【解析】

【分析】（1）根据极坐标与直角坐标的互化公式处理即可；

（2）联立 l 与 C 的方程，采用换元法处理，根据新设 a 的取值范围求解 m 的范围即可．

【小问 1 详解】

因为 l：$\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+m=0$，所以 $\dfrac{1}{2}\rho\cdot\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\cdot\cos\theta+m=0$，

又因为 $\rho\cdot\sin\theta=y,\rho\cdot\cos\theta=x$，所以化简为 $\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+m=0$，

整理得 l 的直角坐标方程：$\sqrt{3}x+y+2m=0$

【小问 2 详解】

联立 l 与 C 的方程，即将 $x=\sqrt{3}\cos 2t$，$y=2\sin t$ 代入

$\sqrt{3}x+y+2m=0$ 中，可得 $3\cos 2t+2\sin t+2m=0$，

所以 $3(1-2\sin^2 t)+2\sin t+2m=0$，

化简为 $-6\sin^2 t+2\sin t+3+2m=0$，

要使 l 与 C 有公共点，则 $2m=6\sin^2 t-2\sin t-3$ 有解，

令 $\sin t=a$，则 $a\in\left[-1,1\right]$，令 $f(a)=6a^2-2a-3$，$(-1\leqslant a\leqslant 1)$，

对称轴为$a=\frac{1}{6}$，开口向上，

所以$f(a)_{max}=f(-1)=6+2-3=5$，

$f(a)_{\min}=f(\frac{1}{6})=\frac{1}{6}-\frac{2}{6}-3=-\frac{19}{6}$，

所以$-\frac{19}{6}\le 2m\le 5$

m的取值范围为$-\frac{19}{12}\le m\le\frac{5}{2}$.

[选修4—5：不等式选讲]

23. 已知a，b，c都是正数，且$a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明：

（1）$abc\le\frac{1}{9}$；

（2）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}$；

【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用三元均值不等式即可证明；

（2）利用基本不等式及不等式的性质证明即可.

【小问1详解】

证明：因为$a>0$，$b>0$，$c>0$，则$a^{\frac{3}{2}}>0$，$b^{\frac{3}{2}}>0$，$c^{\frac{3}{2}}>0$，

所以$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3}\ge\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}}$，

即$(abc)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{3}$，所以$abc\le\frac{1}{9}$，当且仅当$a^{\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{2}}=c^{\frac{3}{2}}$，即$a=b=c=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$时取等号.

【小问2详解】

证明：因为$a>0$，$b>0$，$c>0$，

所以$b+c\ge 2\sqrt{bc}$，$a+c\ge 2\sqrt{ac}$，$a+b\ge 2\sqrt{ab}$，

所以$\frac{a}{\ }<\frac{a}{\ }=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\ }$，$\frac{b}{\ }<\frac{b}{\ }=\frac{b^{\frac{3}{2}}}{\ }$，$\frac{c}{\ }<\frac{c}{\ }=\frac{c^{\frac{3}{2}}}{\ }$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

当且仅当$a=b=c$时取等号.