

2022 年全国统一高考数学试卷甲卷

(理科)

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上, 并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目, 在规定的位罝贴好条形码。

2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $z = -1 + \sqrt{3}i$, 则 $\frac{z}{z\bar{z} - 1} =$

A. $-1 + \sqrt{3}i$

B. $-1 - \sqrt{3}i$

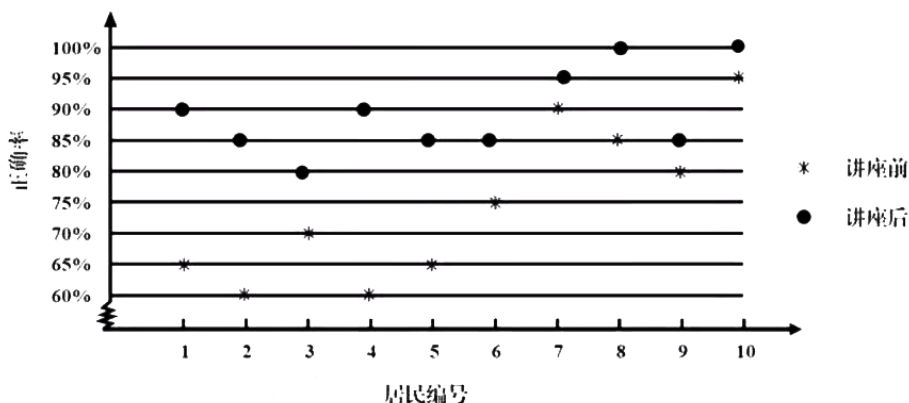
C. $-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$

D. $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$

【答案】C

【解析】由 $\frac{z}{z\bar{z} - 1} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{4 - 1} = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}i}{3}$, 故选: C.

2. 某社区通过公益讲座以及普及社区居民的垃圾分类知识. 为了解讲座效果, 随机抽取 10 位社区居民, 让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷, 这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图:



则

- A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%
- B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%

C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

【答案】B

【解析】由图表信息可知讲座后问卷答题的正确率的平均数为 $89.5\% > 85\%$ ，故选：B.

3. 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $A = \{-1, 2\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$ ，则 $\complement_U(A \cup B) =$

A. $\{1, 3\}$

B. $\{0, 3\}$

C. $\{-2, 1\}$

D. $\{-2, 0\}$

【答案】D

【解析】由 $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$ ， $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3\}$ ，所以 $\complement_U(A \cup B) = \{-2, 0\}$ ，故

选：D.

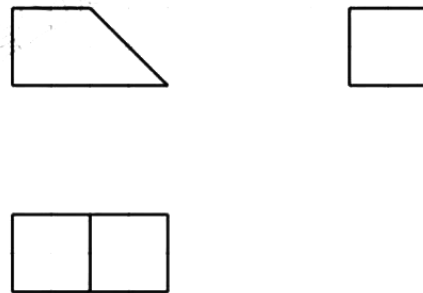
4. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该多面体的体积为

A. 8

B. 12

C. 16

D. 20

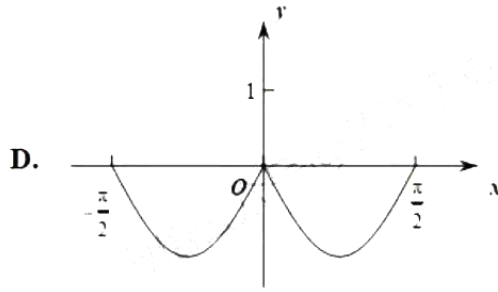
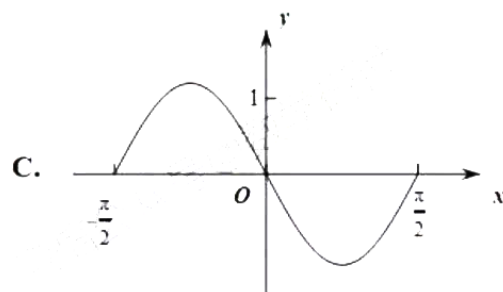
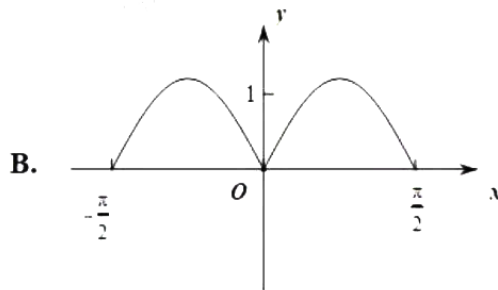
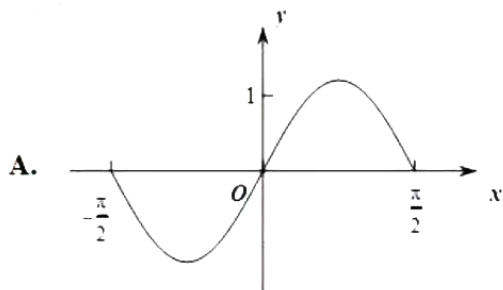


【答案】B

【解析】该多面体的体积一个长方体体积减去一个三棱柱的体积得到，即

$$2 \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 12, \text{ 故选: B.}$$

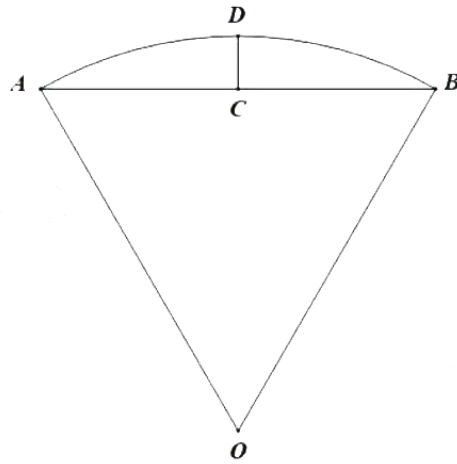
5. 函数 $y = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的图像大致为



的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”，如图， AB 是以为 O 圆心， OA 为半径的圆弧， C 是 AB 的中点， D 在 AB 上， $CD \perp AB$ “会圆术”给出 AB 的弧长的近似值 s 的计算公式： $s = AB + \frac{CD^2}{OA}$. 当 $OA = 2$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ 时， $s =$

- A. $\frac{11-3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$



【答案】B

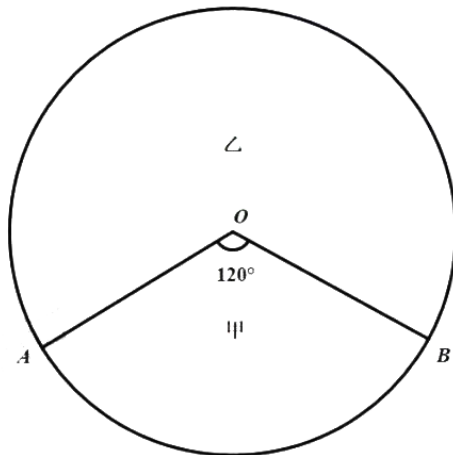
【解析】由条件得， $\triangle OAB$ 为等边三角形，有 $OC = \sqrt{3}$ ， $CD = 2 - \sqrt{3}$ ，所以

$$s = 2 + \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{2} = 2 + \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{11 - 4\sqrt{3}}{2}.$$

9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π ，侧面积分别为 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$ ，

体积分别为 $V_{\text{甲}}$ 和 $V_{\text{乙}}$ ，若 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$ ，则 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} =$

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$



【答案】C

【解析】如图，甲、乙两个圆锥的侧面展开图刚好拼成一个圆，设圆的半径（即圆锥母

线) 为 3, 甲、乙两个圆锥的底面半径分别为 r_1, r_2 , 高分别为 h_1, h_2 , 则 $2\pi r_1 = 4\pi$,

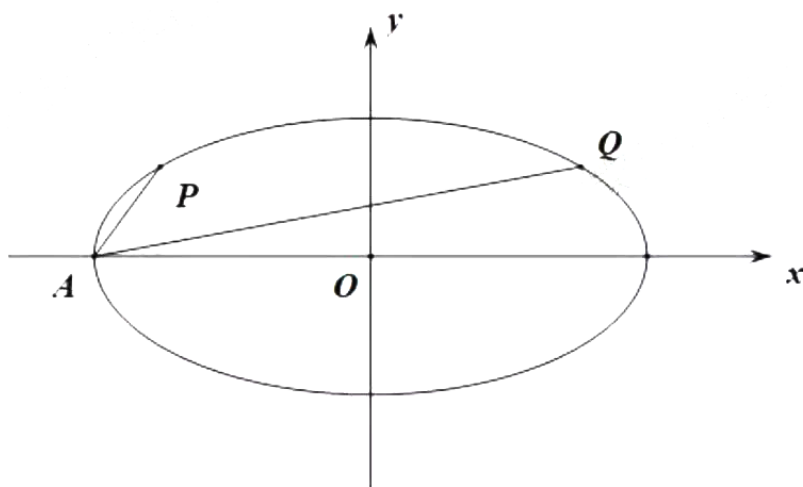
$2\pi r_2 = 2\pi$, 则 $r_1 = 2, r_2 = 1$, 由勾股定理, 得 $h_1 = \sqrt{5}, h_2 = 2\sqrt{2}$, 所以

$$\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{r_1^2 h_1}{r_2^2 h_2} = \frac{2^2 \times \sqrt{5}}{1^2 \times 2\sqrt{2}} = \sqrt{10}.$$

10. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 点 P, Q 均在 C 上, 且关于 y 轴对称. 若

直线 AP, AQ 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$, 则的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$



【答案】A

【解析】椭圆 C 的右顶点为 B , 由于点 P, Q 均在 C 上, 且关于 y 轴对称, 所以直线 $BP,$

AQ 也关于 y 轴对称, 即 $k_{AP} \cdot k_{BP} = -k_{AP} \cdot k_{AQ} = -\frac{1}{4} = e^2 - 1, e^2 = \frac{3}{4}, e = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

11. 已知 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 区间在 $(0, \pi)$ 上恰有三个极值点, 两个零点, 则 ω 的取值范围是

- A. $[\frac{5}{3}, \frac{13}{6})$ B. $[\frac{5}{3}, \frac{19}{6})$ C. $(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}]$ D. $(\frac{13}{6}, \frac{19}{6}]$

【答案】C

【解析】设 $\omega x + \frac{\pi}{3} = t$, 则 $t \in (\frac{\pi}{3}, \pi\omega + \frac{\pi}{3})$, 有两个零点可得 $2\pi < \pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi$, 即

$\frac{5}{3} < \omega \leq \frac{8}{3}$. 又因为有三个极值点, $(\sin t)' = \cos t$, 所以 $\frac{5\pi}{2} < \pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{2}$, 所以 $\frac{13}{6} < \omega \leq \frac{19}{6}$,

综上得 $\frac{13}{6} < \omega \leq \frac{8}{3}$

即选 C.

12. 已知 $a = \frac{31}{32}, b = \cos \frac{1}{4}, c = \frac{1}{4} \sin \frac{1}{4}$, 则

A. $c > b > a$

B. $b > a > c$

C. $a > b > c$

D. $a > c > b$

【答案】A

【解析】构造函数 $h(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

则 $g(x) = h'(x) = -x + \sin x$, $g'(x) = -1 + \cos x \leq 0$

所以 $g(x) \leq g(0) = 0$, 因此, $h(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上递减, 所以 $h\left(\frac{1}{4}\right) = a - b < h(0) = 0$, 即 $a < b$.

另一方面, $\frac{c}{b} = \frac{4 \sin \frac{1}{4}}{\cos \frac{1}{4}} = \frac{\tan \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$, 显然 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x > x$,

所以 $\frac{c}{b} = \frac{4 \sin \frac{1}{4}}{\cos \frac{1}{4}} = \frac{\tan \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} > 1$, 即 $b < c$.

因此 $c > b > a$.

即选 A.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设向量 \vec{a} , \vec{b} 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, 则 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】11

【解析】代入展开即可.

14. 若双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的渐近线与圆 $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ 相切, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】由圆心为 $(0, 2)$, 半径为 1 的圆与直线 $x = my$ 相切可得 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. 从正方体的 8 个顶点中任选 4 个, 则这 4 个点在同一平面上的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{6}{35}$

【解析】 $\frac{12}{C_8^4} = \frac{6}{35}$.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADB = 120^\circ$, $AD = 2$, $CD = 2BD$. 当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时, $BD = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{3}-1$

【解析】 令 $BD=t$ ，以 D 为坐标原点， DC 为 x 轴建立直角坐标系，则 $C(2t,0)$ ， $A(1,\sqrt{3})$ ， $B(-t,0)$ ，

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{(2t-1)^2+3}{(t+1)^2+3} = 4 - \frac{12}{t+1+\frac{3}{t+1}} \geq 4-2\sqrt{3}$$

当且仅当 $t+1=\sqrt{3}$ ，即 $BD=\sqrt{3}-1$ 时取等号。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$.

(1) 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 求 S_n 的最小值.

【答案】 (1) 略; (2) -78

【解析】 (1) 由于 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$, 变形为 $2S_n = 2na_n + n - n^2$, 记为①式,

又 $2S_{n-1} = 2(n-1)a_{n-1} + n - 1 - (n-1)^2$, 记为②式,

①-②可得 $(2n-2)a_n - (2n-2)a_{n-1} = 2n-2, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$

即 $a_n - a_{n-1} = 1, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 由题意可知 $a_7^2 = a_4 a_9$, 即 $(a_1 + 6)^2 = (a_1 + 3)(a_1 + 8)$, 解得 $a_1 = -12$, 所以

$a_n = -12 + (n-1) \times 1 = n - 13$, 其中 $a_1 < a_2 < \dots < a_{12} < 0$, $a_{13} = 0$

则 S_n 的最小值为 $S_{12} = S_{13} = -78$.

【答案】 (1) 见解析; (2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【解析】 (1) $\because PD \perp$ 底面 $ABCD$,

$\therefore PD \perp BD$,

取 AB 中点 E , 连接 DE , 可知 $DE = \frac{1}{2}AB = 1$,

$\because CD \parallel AB$,

$\therefore CD \parallel BE$,

\therefore 四边形 $BCDE$ 为平行四边形,

$\therefore DE = CB = 1$,

$\because DE = \frac{1}{2}AB$,

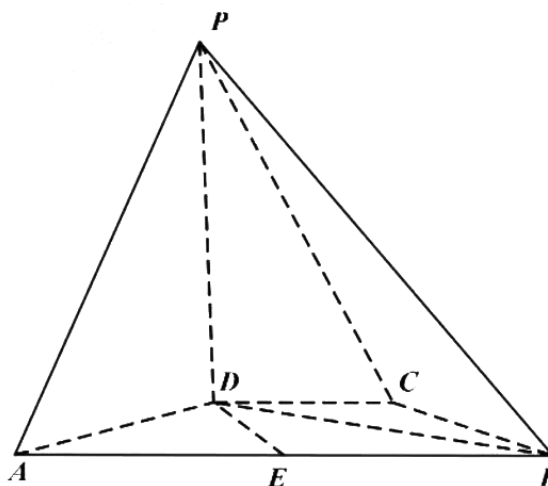
$\therefore \triangle ABD$ 为直角三角形, AB 为斜边,

$\therefore BD \perp AD$,

$\because PD \cap AD = D$,

$\therefore BD \perp$ 平面 PAD ,

$\therefore BD \perp PA$.



(2) 由 (1) 知, PD , AD , BD 两两垂直, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{3}$,

建立空间直角坐标系如图所示, 则

$D(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $P(0,0,\sqrt{3})$,

$\therefore \overrightarrow{PD} = (0,0,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{PA} = (1,0,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB} = (-1,\sqrt{3},0)$,

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$, 则

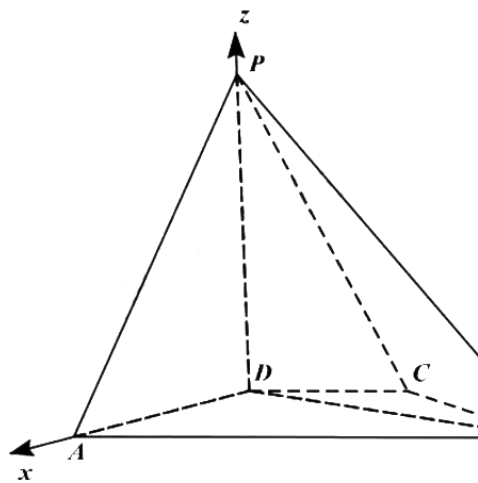
$$\begin{cases} \overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x - \sqrt{3}z = 0 \\ -x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases},$$

不妨设 $y = z = 1$, 则 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, 1)$,

设 PD 与平面 PAB 的所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PD}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PD} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{PD}| |\vec{n}|} = \frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$\therefore PD$ 与平面 PAB 的所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



19. (12分)

甲、乙两个学校进行体育比赛, 比赛共设三个项目, 每个项目胜方得 10 分, 负方得 0 分, 没有平局. 三个项目比赛结束后, 总得分高的学校获得冠军. 已知甲学校在三个项目中获

胜的概率分别为 0.5, 0.4, 0.8, 各项目的比赛结果相互独立.

(1) 求甲学校获得冠军的概率;

(2) 用 X 表示乙学校的总得分, 求 X 的分布列与期望.

【答案】 (1) 0.6; (2) 13.

【解析】 (1) 记甲学校获得冠军为事件 A ,

$$\text{则 } P(A) = 0.5 \times 0.4 \times (1 - 0.8) + 0.5 \times (1 - 0.4) \times 0.8 + (1 - 0.5) \times 0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.6$$

甲学校获得冠军的概率是 0.6.

(2) X 的可能取值为 0, 10, 20, 30

$$\text{则 } P(X=0) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.16$$

$$P(X=10) = 0.5 \times 0.4 \times (1 - 0.8) + 0.5 \times (1 - 0.4) \times 0.8 + (1 - 0.5) \times 0.4 \times 0.8 = 0.44$$

$$P(X=20) = 0.5 \times (1 - 0.4) \times (1 - 0.8) + (1 - 0.5) \times (1 - 0.4) \times 0.8 + (1 - 0.5) \times 0.4 \times (1 - 0.8) = 0.34$$

$$P(X=30) = (1 - 0.5) \times (1 - 0.4) \times (1 - 0.8) = 0.06$$

$$X \text{ 的期望值为 } E(X) = 0 \times 0.16 + 10 \times 0.44 + 20 \times 0.34 + 30 \times 0.06 = 13.$$

20. (12 分)

设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $D(p, 0)$, 过 F 的直线交 C 于 M, N 两点,

当直线 $MD \perp x$ 轴时, $|MF| = 3$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 MD 、 ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B , 记直线 MN 、 AB 的倾斜角分别为 α, β , 当 $\alpha - \beta$ 取得最大值时, 求直线 AB 的方程.

【答案】 (1) C 的方程为 $y^2 = 4x$; (2) AB 的直线方程为 $x + \sqrt{2}y - 4 = 0$.

【解析】 (1) 由题可知, 当 $x = p$ 时, $y^2 = 2p^2$, 则 $y_M = \sqrt{2}p$

$$\text{则可知 } |MD| = \sqrt{2}p, |FD| = \frac{p}{2}$$

$$\text{则在 } Rt\triangle MFD \text{ 中, } |FD|^2 + |DM|^2 = |FM|^2$$

$$\text{得 } \left(\frac{p}{2}\right)^2 + (\sqrt{2}p)^2 = 9, \text{ 解得 } p = 2$$

$$\text{则 } C \text{ 的方程 } C: y^2 = 4x$$

(2) 要使 $\alpha - \beta$ 最大, 则 $\tan(\alpha - \beta)$ 最大, 且易知当直线 MN 的斜率为负时, $\alpha - \beta$ 为正才能达到最大.

$$\text{又 } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$, 由 (1) 可知 $F(1, 0), D(2, 0)$

$$\text{则 } \tan \beta = k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}$$

$$\text{又 } N, D, B \text{ 三点共线, 则 } k_{ND} = k_{BD}, \text{ 则 } \frac{y_2 - 0}{x_2 - 2} = \frac{y_4 - 0}{x_4 - 2}, \text{ 则 } \frac{y_2 - 0}{\frac{y_2^2}{4} - 2} = \frac{y_4 - 0}{\frac{y_4^2}{4} - 2}$$

$$\text{得 } y_2 y_4 = -8, \text{ 即 } y_4 = \frac{-8}{y_2}$$

$$\text{同理由 } M, D, A \text{ 三点共线可得 } y_3 = \frac{-8}{y_1}$$

$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{4}{y_3 + y_4} = \frac{y_1 y_2}{-2(y_1 + y_2)}$$

由题可知, 直线 MN 斜率不为 0, 不妨设 $l_{MN}: x = my + 1 (m < 0)$

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4my - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 4m \\ y_1 y_2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{则 } \tan \beta = \frac{4}{4m} = \frac{1}{m}, \quad \tan \alpha = \frac{-4}{-2 \times 4m} = \frac{1}{2m}$$

$$\text{则 } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{1}{2m} - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{m}} = \frac{-1}{2m + \frac{1}{m}}$$

则可知当 $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\tan(\alpha - \beta)$ 最大, 即 $\alpha - \beta$ 最大, 此时

$$AB \text{ 的直线方程为 } y - y_3 = \frac{4}{y_3 + y_4}(x - x_3), \text{ 即 } 4x - (y_3 + y_4)y + y_3 y_4 = 0$$

$$\text{又 } y_3 + y_4 = \frac{-8}{y_1} + \frac{-8}{y_2} = \frac{-8(y_1 + y_2)}{y_1 y_2} = 8m = -4\sqrt{2}$$

$$y_3 y_4 = \frac{-8}{y_1} \cdot \frac{-8}{y_2} = -16$$

则 AB 的直线方程为 $4x + 4\sqrt{2}y - 16 = 0$, 即 $x + \sqrt{2}y - 4 = 0$

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 则 $x_1 x_2 < 1$.

【答案】(1) $(-\infty, e+1]$; (2) 见证明;

【解析】(1) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x} - \frac{1}{x} + 1 = \frac{(e^x+x)(x-1)}{x^2}$

令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$, 所以 $0 < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

$x > 1$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; $\therefore f(x)_{\min} = f(1) = e + 1 - a$, 要使得 $f(x) \geq 0$ 恒成立

即满足: $\therefore f(x)_{\min} = f(1) = e + 1 - a \geq 0 \Rightarrow e + 1 \geq a$.

(2) 由 (1) 知要使得有 $f(x)$ 两个零点, 则 $\therefore f(x)_{\min} = f(1) = e + 1 - a < 0 \Rightarrow e + 1 < a$

假设 $0 < x_1 < 1 < x_2$. 要证明 $x_1 x_2 < 1$ 即证明 $1 < x_2 < \frac{1}{x_1}$, 又由于 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单增, 即证明

$f(x_2) < f(\frac{1}{x_1}) \Leftrightarrow f(x_1) < f(\frac{1}{x_1})$. 下面构造函数 $F(x) = f(x) - f(\frac{1}{x}) (0 < x < 1)$

$$F'(x) = f'(x) + f'(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(e^x + x - xe^{\frac{1}{x}} - 1)}{x^2}$$

由于 $e^x > ex \Rightarrow e^x + x > ex + x = (e+1)x$, 又函数 $y = xe^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0, 1)$ 单减,

$$\therefore xe^{\frac{1}{x}} > e \Rightarrow -xe^{\frac{1}{x}} - 1 < -e - 1 \therefore e^x + x - xe^{\frac{1}{x}} - 1 < e + 1 - e - 1 = 0$$

$\therefore 0 < x < 1$ 时 $F'(x) > 0 \Rightarrow F(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 而 $F(1) = f(1) - f(1) = 0$

$\therefore F(x) > 0 \Rightarrow f(x) < f(\frac{1}{x})$ 得证.

22. 【选修4-4: 坐标系与参数方程】(10分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{2+t}{6} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$, (t 是参数), 曲线 C_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x = -\frac{2+s}{6} \\ y = -\sqrt{s} \end{cases}, (s \text{ 是参数}).$$

(1) 写出 C_1 的普通方程;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴建立极坐标系, 曲线 C_3 的极坐标方程为

$2\cos\theta - \sin\theta = 0$, 求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标, 及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

【答案】(1) $y^2 = 6x - 2 (y \geq 0)$;

(2) C_3 与 C_1 交点为 $(\frac{1}{2}, 1)$ 和 $(1, 2)$; C_3 与 C_2 交点为 $(-1, -2)$ 和 $(-\frac{1}{2}, -1)$ 。

【解析】(1) 由 $C_1: \begin{cases} x = \frac{2+t}{6} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$ 消去参数 t 得 $y^2 = 6x - 2 (y \geq 0)$.

(2) $C_3: 2\cos\theta - \sin\theta = 0$, 两边乘 ρ , $\Rightarrow 2\rho\cos\theta - \rho\sin\theta = 0$.

$\therefore C_3: y = 2x$.

联立 $\begin{cases} y^2 = 6x - 2 (y \geq 0) \\ y = 2x \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

C_2 消去参数 s 得 $y^2 = -6x - 2 (y \leq 0)$

联立 $\begin{cases} y^2 = -6x - 2 (y \leq 0) \\ y = 2x \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$

综上所述, C_3 与 C_1 交点为 $(\frac{1}{2}, 1)$ 和 $(1, 2)$; C_3 与 C_2 交点为 $(-1, -2)$ 和 $(-\frac{1}{2}, -1)$ 。

23. [选修 4-4: 不等式选讲] (10 分)

已知正实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + 4c^2 = 3$

求证: ① $a + b + 2c \leq 3$.

②若 $b = 2c$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$.

解析:

①由柯西不等式知:

$$(a^2 + b^2 + 4c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + 2c)^2$$

即 $3 \times 3 \geq (a + b + 2c)^2$ 且 a, b, c 是正实数

故 $a + b + 2c \leq 3$ (当且仅当 $a = b = 2c$ 时取等, 即 $a = b = 1, c = \frac{1}{2}$)

②由①知 $a + b + 2c \leq 3$ 且 $b = 2c$.

故 $0 < a + 4c \leq 3$, $\frac{1}{a + 4c} \geq \frac{1}{3}$

由权方和不等式知

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{4c} \geq \frac{9}{a + 4c} \geq 3. \text{ 故 } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3.$$