2022 年全国甲卷文科数学卷详解

选择题答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	D	B	C	C	A	B	D	C	B	A

选择题答案分布情况：3A,4B,3C,2D

填空题答案

13. $-\frac{3}{4}$； 14. $(x-1)^2+(y+1)^2=5$； 15.满足 $1<e\le\sqrt{5}$ 中的任何一个数都即正确； 16. $\sqrt{3}-1$

1.设集合 A=｛-2,-1,0,1,2｝，B=$\left\{x\middle|0<x<\frac{5}{2}\right\}$，则 AnB=

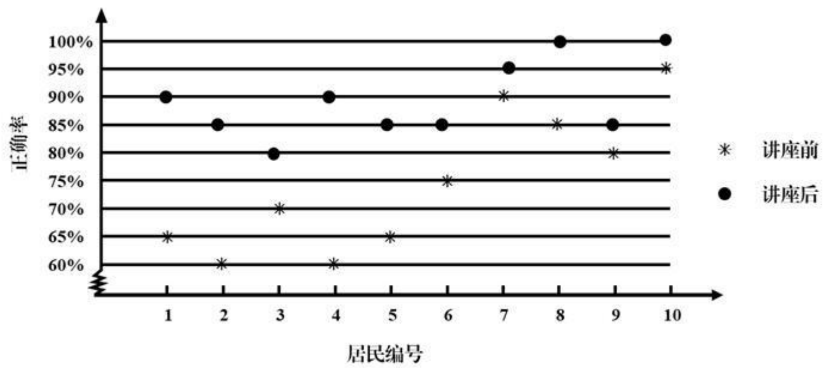
A.｛0,1,2｝　　B.{-2,-1,0}　　C.{0,1}　　D.｛1,2｝

解析：方法一：直接通过交集的运算定义可得 AnB=｛0,1,2｝　故选 A

方法二：代入排除法，排除 B/C/D,选 A

综上第 1 题选 A

2.某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识.为了解讲座效果，随机抽取 10 位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则

A.讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70％

B.讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85％

C.讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D.讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

解析：A:讲座前问卷大题的正确率中位数为$\frac{70\%+75\%}{2}=72.5\%$　所以 A 错

B 选项：可直接通过图表观察得知：问卷大题的正确率的平均数大于 85%所以 B 对

C 选项：讲座前问卷答题的正确率数据波动要大于讲座后问卷答题的正确率，故标准差也应该大于讲座后的标准差，所以 C 错

D 选项：讲座前正确率的极差为 35%，讲座后的为 20%，故 D 错。

综上第 2 题选 B

3.若 z=1+i，则 $\left|iz+3\overline{z}\right|=$

A. $4\sqrt{5}$　　B. $4\sqrt{2}$

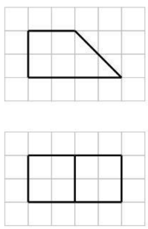
C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{2}$

解析：由 z=1+i 故 $iz+3z=i\left(1+i\right)+3\left(1-i\right)=2-2i$

$\left|iz+3\overline{z}\right|=\left|2-2i\right|=2\sqrt{2}$

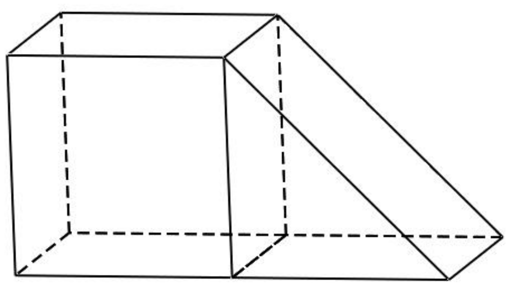
综上第 3 题选 D

4。如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该多面体的体积为



A.8　　B.12　　C.16　　D.20

解析：该多面体是一个 2×2×2 的正方体与一个直三棱柱的组合体，如上图直三棱柱底面是一个直角边为 2 的等腰直角三角形。高为 2，所以体积为：2×2×2+$\frac{1}{2}\times2\times2\times2=8+4=12$故选$B$



综上第 4 题选 B

5.将函数 $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)\left(\omega\succ0\right)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到曲线 C，若 C

关于 y 轴对称，则ω的最小值是：

A $\frac{1}{6}$　　　　$B.\frac{1}{4}$　　　　$C.\frac{1}{3}$　　　　$D.\frac{1}{2}$

解析：记 $g(x)$ 为 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后得到的曲线，则

$g(x)$ = $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ = $\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{3}\right)$ 由 $g(x)$ 关于 Y 轴对称，可得：$\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$k\in z$　　故：$\omega=\frac{1}{3}+2k$　　所以 ω 的最小值为 $\frac{1}{3}$　　选 C

综上第 5 题选 C

6.从分别写有 1，2，3，　4，5，　6 的 6 张卡片中无放回随机抽取 2 张，则抽到的 2 张卡片上的数字之积是 4 的倍数的概率为（　　）

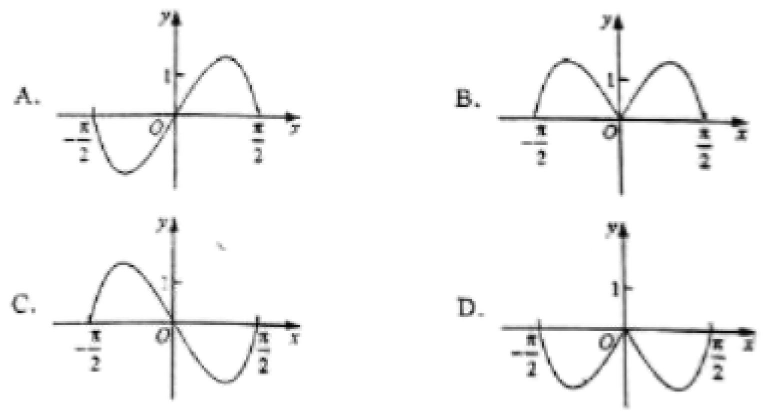
A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】无放回随机抽取 2 张方法有 12，13，14，15，16，23，24，25，26，34，35，36，45，46，56 共 15 种，其中数字之积为 4 的倍数的是 14，24，26，,34,45，46 共 6 种，$p=\frac{m}{n}=\frac{2}{5}$，故选 B。

综上第 6 题选 C

7.函数 $f(x)=\left(3^{x}-3^{-x}\right)\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的图像大致为（　　）



【答案】A

【解析】因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(3^{\frac{\pi}{4}}-3^{-\frac{\pi}{4}}\right)\cos\frac{\pi}{4}>0$，所以排除 C,D;又因为

$f\left(-x\right)=\left(3^{-x}-3^{-(-x)}\right)\cos\left(-x\right)=-\left(3^{x}-3^{-x}\right)\cos x=-f\left(x\right)$，所以是奇函数，故选 A.

综上第 7 题选 A

8.当 $x=1$ 时，函数 $f\left(x\right)=a\ln x+\frac{b}{x}$ 取得最大值-2,则 $f'(2)=$（　　）

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】因为 $f'(x)=\frac{ax-b}{x^2}$，由题意可知 $f'(1)=a-b=0$，$f\left(1\right)=a\ln 1+b=b=-2$，所以 $a=-2$，因此 $f'(2)=\frac{-2\times 2-\left(-2\right)}{4}=-\frac{1}{2}$，故选 B.

综上第 8 题选 B

9.在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30^0，则（　　）

A. $AB=2AD$　　B. $AB与平面AB_1C_1D所成的角为30^0$

C. $AC=CB_1$　　D. $B_1D与平面BB_1C_1C所成的角为45^0$

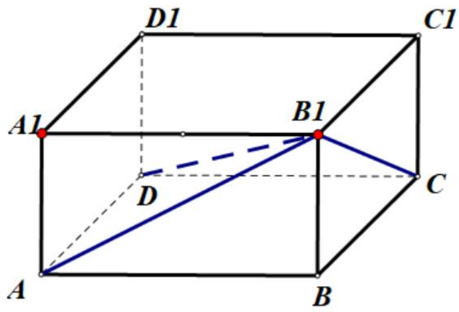
【答案】D

【解析】如图由题意可知 $\angle B_1DB和\angle DB_1A$ 分别是 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角，所以 $\angle B_1DB=\angle DB_1A=30^0$，设 $AB=a,AD=b,AA_1=c$ 根据题意有 $\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}=\tan 30^0,即a^2+c^2=3b^2$ ①，同理有 $a^2+b^2=3c^2$ ②，由①和②可得 $a=\sqrt{2}b,b=c,\ 所以AB=\sqrt{2}AD，A错误;所以AC=\sqrt{3}b，CB_1=\sqrt{2}b,C错误;$

过 $B做BM\perp AB_1于M$，则 $BM\perp 面AB_1C_1D$，$\angle BAB_1是AB与平面AB_1C_1D所成的角$，

$\sin\angle BAB_1=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 B 错误；$\angle B_1DC是B_1D与平面BB_1C_1C所成的角$，

$\sin\angle B_1DC=\frac{B_1C}{B_1D}=\frac{\sqrt{2}b}{2b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle B_1DC=\frac{\pi}{4}$，故选 D.



综上第 9 题选 D

10.甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面面积分别为$S_{甲}$和$S_{乙}$，体积分别为$V_{甲}$和$V_{乙}$,若 $\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\frac{5\sqrt{0}}{4}$

【答案】C

【解析】设甲、乙两个圆锥的母线长l，圆锥甲的底面半径为$r_{甲}$，高为$h_{甲}$，圆锥乙的底面半径为$r_{乙}$，高为$h_{乙}$，甲侧面展开图的圆心角为α，则乙侧面展开图的圆心角为$2\pi-\alpha$，

$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}=2$，所以$\alpha=\frac{4\pi}{3}$，$r_{甲}=\frac{2}{3}l, r_{乙}=\frac{1}{3}l,\ h_{甲}=\frac{\sqrt{5}}{3}l, h_{乙}=\frac{2\sqrt{2}}{3}l,$

$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_{甲}^{2}h_{甲}}{\frac{1}{3}\pi r_{乙}^{2}h_{乙}}=\sqrt{10}$，故选 C.

综上第 10 题选 C

11．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{3}$，$A_1$，$A_2$分别为$C$的左、右顶点，$B$为$C$的上顶点．若$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，则$C$的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$　　B．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　　C．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　D．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

【答案】B

【解析】由题意，$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B(0,b)$，所以$\overrightarrow{BA_1}=(-a,-b)$，$\overrightarrow{BA_2}=(a,-b)$，

$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-a^2+b^2=-1$ ①．又 $1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{9}$，所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$，答案选 B.

综上第 11 题选 B

12．已知 $9^m=10$，$a=10^m-11$，$b=8^m-9$，则（　　）

A．$a>0>b$　　B．$a>b>0$　　C．$b>a>0$　　D．$b>0>a$

【答案】A

【解析】由 $9^m=10$，可得 $m=\log_9 10\in(1,1.5)$．

根据 a，b 的形式构造函数 $f(x)=x^m-x-1$（$x>1$），则 $f'(x)=mx^{m-1}-1$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x_0=m^{\frac{1}{1-m}}$，由 $m=\log_9 10\in(1,1.5)$ 知 $x_0\in(0,1)$．

$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(10)>f(8)$，即 $a>b$，

又因为 $f(9)=9^{\log_9 10}-10=0$，所以 $a>0>b$，答案选 A.

综上第 12 题选 A

13．已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,m+1)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$________.

【答案】$-\dfrac{3}{4}$

【解析】由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $m+3m+3=0$，解得 $m=-\dfrac{3}{4}$．

14．设点 M 在直线 $2x+y-1=0$ 上，点 $(3,0)$ 和 $(0,1)$ 均在 $\odot M$ 上，则 $\odot M$ 的方程为__________.

【答案】$(x-1)^2+(y+1)^2=5$

【解析】方法一：因为点 $(3,0)$ 和 $(0,1)$ 的中点为 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2})$ 且 $k=-\dfrac{1}{3}$

所以点 $(3,0)$ 和 $(0,1)$ 的垂直平分线方程为：$y=3x-4$

联立方程 $\begin{cases} y=3x-4 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$，解得圆心 $M(1,-1)$

又 $r^2=(3-1)^2+1^2=5$

所以 $\odot M$ 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$．

方法二：设圆心 $M(a,1-2a)$，则 $r^2=(a-3)^2+(1-2a)^2=(a-0)^2+(1-2a-1)^2$

解得 a=1

从而得 $\odot M$ 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$．

15．双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为e，写出满足条件“直线$y=2x$与C无公共点”的e的一个值__________.

【答案】2（答案不唯一，只要$1<e\le\sqrt{5}$即可）

【解析】因为双曲线C的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，

要使直线$y=2x$与C无公共点，则只需要$2\ge\frac{b}{a}$即可，

由$\frac{b}{a}\le 2$的$\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}\le 4$，所以$e^2\le 5$，

解得$1<e\le\sqrt{5}$

16． 已知ΔABC中，点D在边BC上，$\angle ADB=120^\circ, AD=2, CD=2BD$，当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时，$BD=$__________.

【答案】$\sqrt{3}-1$

【解析】设$BD=x$，则$CD=2x$，

则在ΔABD中由余弦定理得：$AB^2=2^2+x^2-2\times 2\cdot x\cos 120^\circ$即$AB^2=4+x^2+2x$，

在ΔADC中由余弦定理得：$AC^2=2^2+(2x)^2-2\times 2\cdot 2x\cos 60^\circ$即$AC^2=4+4x^2+4x$，

所以$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=\frac{4+4x^2+4x}{4+x^2+2x}$，$x>0$

设$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+4}$，$x>0$，则$f'(x)=\frac{3x^2+6x-6}{(x^2+2x+4)^2}=0$得：$x=\sqrt{3}-1$.

可知$f(x)$在$(0,\sqrt{3}-1)$单调递减，在$(\sqrt{3}-1,+\infty)$单调递增，

所以$f(x)$在$x=\sqrt{3}-1$时取得最小值，

所以当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时，$BD=\sqrt{3}-1$.

17.(12 分)

甲、乙两城之间的长途客车均由 A 和 B 两家公司运营，为了解这两家公司长途客车的运行情况，随机调查了甲、乙两城之间的 500 个班次，得到下面列联表：

	准点班次数	未准点班次数
A	240	20
B	210	30

（1）根据上表，分别估计这两家公司甲、乙两城之间的长途客车准点的概率：

(2)能否有 90％的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关？

附：$k^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

解（1）甲城一共调查了 260 辆车，其中有 240 辆准点，故甲城准点的概率= $\dfrac{240}{260}$=0.923

乙城一共调查了 240 辆，其中有 210 辆准点。故乙城准点的概率= $\dfrac{210}{240}$=0.875

（2）：

	准点班次数	未准点班次数	合计
A	240	20	260
B	210	30	240
合计	450	50	500

$$k^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{500(240\times 30-210\times 20)^2}{260\times 240\times 450\times 50}=3.2\succ 2.706$$

所以有 90％的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关

18．（12 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $\dfrac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$．

（1）证明：$\{a_n\}$ 是等差数列；

（2）若 a_4，a_7，a_9 成等比数列，求 S_n 的最小值．

解：（1）由已知得 $2S_n+n^2=2na_n+n$．

当 $n=1$ 时，原式恒成立；

当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+(n-1)$；

两式相减得：$2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$，

整理得：$(2n-2)a_n=(2n-2)a_{n-1}+(2n-2)$，

因为 $n\geq 2$，故 $2n-2>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=1(n\geq 2)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列。

（2）由（1）$d=1$；由题意 ${a_7}^2=a_4a_9$，即 $(a_1+6)^2=(a_1+3)(a_1+8)$，

化简得：$a_1=-12$．故 $\begin{aligned}S_n&=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-12n+\frac{n(n-1)}{2}\\&=\frac{1}{2}n^2-\frac{25}{2}n=\frac{1}{2}(n-\frac{25}{2})^2-\frac{625}{8}\end{aligned}$，

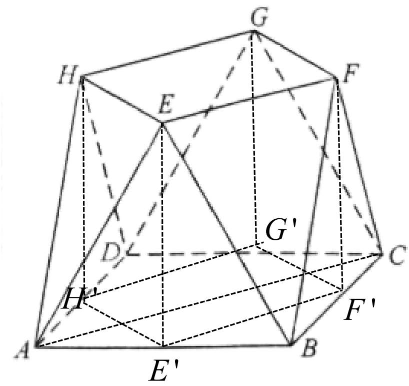
因为$n\in N^*$，所以$n=12$或$n=13$时，$(S_n)_{\min}=-78$.

19．（12 分）

小明同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒，包装盒如图所示：底面$ABCD$是边长为 8（单位：cm）的正方形，$\triangle EAB$，$\triangle FBC$，$\triangle GCD$，$\triangle HDA$均为正三角形，且它们所在的平面都与平面$ABCD$垂直.

（1）证明：$EF//$平面$ABCD$

（2）求该包装盒的容积（不计包装盒材料的厚度）



解：（1）过点E作$EE'\perp AB$于点E'，过点F作$FF'\perp BC$于点F'，连接$E'F'$

$\because$底面$ABCD$是边长为 8 的正方形，$\triangle EAB$、$\triangle FBC$均为正三角形，且它们所在的平面都与平面$ABCD$垂直

$\therefore E',F'$分别是AB,BC的中点

$\therefore EE'\perp AB,FF'\perp BC$，且$EE'=FF'=4\sqrt{3}$

$\therefore$四边形$EE'F'F$为矩形

$\therefore EF\parallel E'F',E'F'\subset$平面$ABCD$

$\therefore EF\parallel$平面$ABCD$

（2）过点G,H分别作$GG'\perp CD,HH'\perp DA$，连接$F'G',G'H',H'E',AC$，由（1）及题意可知，$EFGH-E'F'G'H'$为长方体，故该包装盒可分成一个长方体和四个相等的四棱锥组合而成

由底面$ABCD$是边长为 8 的正方形可得：$E'F'=H'E'=\frac{1}{2}AC=4\sqrt{2}$

$\therefore$所求该包装盒的容积为

$V=V_{EFGH-E'F'G'H'}+4V_{A-EE'H'H}$

$=E'F'\times E'H'\times EE'+4\times\frac{1}{3}\times S_{EE'H'H}\times\frac{1}{4}AC$

$=4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{3}+4\times\frac{1}{3}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{2}$

$=\frac{640\sqrt{3}}{3}$

20．（12 分）已知函数 $f(x)=x^3-x$，$g(x)=x^2+a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.

（1）若 $x_1=-1$，求 a；

（2）求 a 的取值范围.

【答案】（1）$a=1$；（2）$a\geqslant -1$

【解析】（1）$\because f'(x)=3x^2-1$，$\therefore f'(1)=2$，且 $f(1)=0$

故 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线为 $y=2x$

又 $y=2x$ 与 $y=g(x)$ 相切，将直线 $y=2x$ 代入 $g(x)=x^2+a$ 得 $x^2-2x+a=0$

由 $\Delta=4-4a=0$ 得 $a=1$

（2）$\because f'(x)=3x^2-1$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线为

$y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$，即 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$；

由 $g(x)=x^2+a$ 得 $g'(x)=2x$，

设 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,g(x_2))$ 处的切线为 $y-(x_2^2+a)=2x_2(x-x_2)$，

即 $y=-2x_2x-x_2^2+a$

$\therefore \begin{cases}3x_1^2-1=2x_2\\-2x_1^3=a-x_2^2\end{cases}$，

$\therefore a=x_2^2-2x_1^3=\dfrac{1}{4}(9x_1^4-8x_1^3-6x_1^2+1)$

令 $h(x_1)=9x_1^4-8x_1^3-6x_1^2+1$，则 $h'(x_1)=36x_1^3-24x_1^2-12x_1=12x_1(x_1-1)(3x_1+1)$

当 $x_1<-\dfrac{1}{3}$ 或 $0<x_1<1$ 时，$h'(x_1)<0$，此时函数 $y=h(x_1)$ 单调递减；

当 $-\dfrac{1}{3}<x_1<0$ 或 $x_1>1$ 时，$h'(x_1)>0$，此时函数 $y=h(x_1)$ 单调递增；

又 $h(-\dfrac{1}{3})=\dfrac{20}{27}, h(0)=1, h(1)=-4$，$\therefore h(x_1)_{\min}=h(1)=-4$

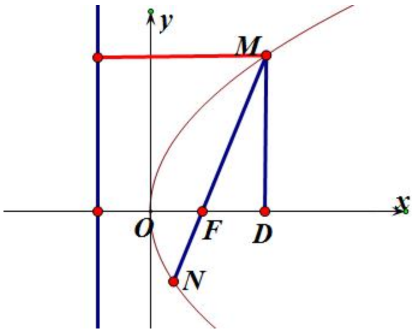
$\therefore a\geqslant\dfrac{-4}{4}=-1$，故 $a\geqslant -1$

21. (12 分)

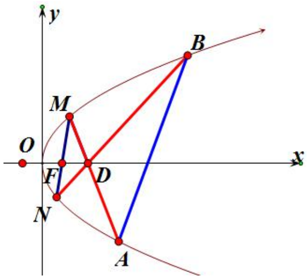
设抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，点 D(p,0)，过 F 的直线交 C 于 M，N 两点.当直线 MD 垂直于 x 轴时，|MF|=3.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 MD，ND 与 C 的另一个交点分别为 A，B,记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 a，β．当 a-β 取得最大值时，求直线 AB 的方程.



(1) 如图，由已知 x_M=p,|MF|=3=x_M+$\frac{p}{2}$，所以 p=2，抛物线 C 的方程 y^2 =4x



(2) 令$K_{MN}=k_1=\tan\alpha$ ，$K_{AB}=k_2=\tan\beta$，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$

令 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,$(y_1>0$，$y_2<0)$ $A(x_3,y_3),B(x_4,y_4)$（$y_3<0,y_4>0$），AB:y=$k_2(x-m)$

由$\begin{cases}y=k_1(x-1)\\ y^2=4x\end{cases}$得$x_1x_2=1$

由$\begin{cases}y=k_2(x-m)\\ y^2=4x\end{cases}$得$x_3x_4=m^2$

由$\begin{cases}y=k_{MD}(x-2)\\ y^2=4x\end{cases}$得$x_1x_3=4$,$\begin{cases}y=k_{ND}(x-2)\\ y^2=4x\end{cases}$得$x_2x_4=4$,

所以有 $M(x_1,2\sqrt{x_1}),N(\frac{1}{x_1},\frac{-2}{\sqrt{x_1}}),A(\frac{4}{x_1},\frac{-4}{\sqrt{x_1}}),B(4x_1,4\sqrt{x_1})$

$k_1=\frac{2\sqrt{x_1}}{x_1-1}$，$k_2=\frac{\sqrt{x_1}}{x_1-1}$,所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{k_2}{1+2{k^2}_2}=\frac{1}{\frac{1}{k_2}+2k_2}$，所以${k_2}^2$=$\frac{1}{2}$时$\alpha-\beta$最大

此时易得$x_3x_4=16x_1x_2=m^2$，所以 m=4，所以 AB 方程：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$（$x-4$）

22.【选修 4-4：坐标系与参数方程】（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{2+t}{6},\\ y=\sqrt{t}\end{cases}$（t 是参数），曲线 C_2 的参数方程为

$\begin{cases}x=-\frac{2+s}{6},\\ y=-\sqrt{s}\end{cases}$（s 是参数）.

(1) 写出 C_1 的普通方程；

(2) 以坐标原点为极点，x 轴正半轴建立极坐标系，曲线 C_3 的极坐标方程为 $2\cos\theta-\sin\theta=0$，求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标，及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

解：

（1）$C_1:\begin{cases}x=\frac{2+t}{6}\\ y=\sqrt{t}\end{cases}$,消去参数 t 得 $x=\frac{2+y^2}{6}(y\geq 0)\Longrightarrow\quad y^2=6x-2(y\geq 0)$.

(2) $C_3:2\cos\theta-\sin\theta=0$,两边乘 ρ，$\Longrightarrow\ 2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=0$.

∴C_3:y=2x.

联立$\begin{cases}y^2=6x-2(y\geq 0)\\ y=2x\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

C_2 消去参数 s 得$y^2=-6x-2(y\leq 0)$

联立$\begin{cases}y^2=-6x-2(y\leq 0)\\ y=2x\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$

综上所述，C_3 与 C_1 交点为（$\frac{1}{2}$，1）和（1，2）；C_3 与 C_2 交点为（-1，-2）和（-$\frac{1}{2}$,-1）。

23.已知正实数 $a\ .b\ .c$ 满足$a^2+b^2+4c^2=3$

求证：

① $a+b+2c\leq 3$.

②若 $b=2c$. 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geq 3$.

①解析：

由柯西不等式知：

$(a^2+b^2+4c^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(a+b+2c)^2$

即$3\times 3\geq(a+b+2c)^2$且 $a\ .b\ .c$ 是正实数

故$a+b+2c\leq 3$（当且仅当$a=b=2c$时取等 .即 $a=b=1.c=\frac{1}{2}$）

②解析：

由①知$a+b+2c\leq 3$且$b=2c$.

故$0<a+4c\leq 3.\frac{1}{a+4c}\geq\frac{1}{3}$

由权方和不等式知

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{4c}\geq\frac{9}{a+4c}\geq 3.$$

故$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geq 3.$