2022 年普通高等学校招生全国统一考试（新高考 I 卷）

数　　学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．请保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若集合 $M=\{x\mid\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x\mid 3x\geqslant 1\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{x\mid 0\leqslant x<2\}$　　B．$\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x<2\}$

C．$\{x\mid 3\leqslant x<16\}$　　D．$\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x<16\}$

【答案】D

【解析】集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x<16\}$，集合 $N=\{x\mid x\geqslant\frac{1}{3}\}$，$M\cap N=\{x\mid\frac{1}{3}\leqslant x<16\}$．故选 D.

2．若 $i(1-z)=1$，则 $z+\bar{z}=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【答案】D

【解析】对原式两边同时乘以 i 得：$z-1=i$，即 $z=1+i$，所以 $\bar{z}=1-i$，即 $z+\bar{z}=2$．故选 D.

3．在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$．记 $\overrightarrow{CA}=m$，$\overrightarrow{CD}=n$，则 $\overrightarrow{CB}=$

A．$3m-2n$　　B．$-2m+3n$　　C．$3m+2n$　　D．$2m+3n$

【答案】B

【解析】因为 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AD}$，又因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$，所以 $\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}$，即 $\overrightarrow{CB}=-2m+3n$．故选 B.

4．南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库，已知该水库水位为海拔 148.5m 时，相应水面的面积为 140km^2；水位为海拔 157.5m 时，相应水面的面积为 180km^2．将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5m 上升到 157.5m 时，增加的水量约为 $(\sqrt{7}\approx 2.65)$

A．$1.0\times 10^9\text{m}^3$　　B．$1.2\times 10^9\text{m}^3$

C．$1.4\times 10^9\text{m}^3$　　D．$1.6\times 10^9\text{m}^3$

【答案】C

【解析】由题意 $S_1=140\text{km}^2$，$S_2=180\text{km}^2$，$h=(157.5-148.5)\text{km}=9\text{km}$，代入棱台体积 $V=\dfrac{1}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})h$，公式可得：$V\approx 1.4\times 10^9\text{m}^3$．故选 C．

5．从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为

A．$\dfrac{1}{6}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

【答案】D

【解析】总事件数共 $C_7^2=\dfrac{7\times 6}{2}=21$，

第一个数取 2 时，第二个数可以是 $3,5,7$；

第一个数取 3 时，第二个数可以是 $4,5,7,8$；

第一个数取 4 时，第二个数可以是 $5,7$；

第一个数取 5 时，第二个数可以是 $6,7,8$；

第一个数取 6 时，第二个数可以是 7；

第一个数取 7 时，第二个数可以是 8；

所以 $P=\dfrac{3+4+2+3+1+1}{21}=\dfrac{14}{21}=\dfrac{2}{3}$．

6．记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 T．若 $\dfrac{2}{3}\pi<T<\pi$，且 $y=f(x)$ 的函数图象关于点 $(\dfrac{3\pi}{2},2)$ 中心对称，则 $f(\dfrac{\pi}{2})=$

A．1　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．$\dfrac{5}{2}$　　D．3

【答案】A

【解析】$\omega=\dfrac{2\pi}{T}\in(2,3)$，$y=f(x)$ 的函数图象关于点 $(\dfrac{3\pi}{2},2)$ 中心对称，则有 $b=2$，且

$f(\frac{3\pi}{2})=2$，所以 $\sin(\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4})+2=2$，则 $\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=2k\pi, k\in\mathbf{Z}$；解得 $\omega=\frac{8k-1}{6}$，由 $\omega\in(2,3)$ 得 $k=2$，$\omega=\frac{5}{2}$，故 $f(\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})+2=-1+2=1$.

7. 设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

【答案】C

【解析】令 $a=xe^{x}$，$b=\frac{x}{1-x}$，$c=-\ln(1-x)$，

① $\ln a-\ln b=x+\ln x-[\ln x-\ln(1-x)]$，

$y=x+\ln(1-x), x\in(0.0.1]$；$y'=1-\frac{1}{1-x}=\frac{-x}{1-x}<0$，

所以 $y\leqslant 0$，所以 $\ln a-\ln b\leqslant 0$，所以 $b>a$

② $a-c=xe^{x}+\ln(1-x), x\in(0,0.1]$，

$y'=xe^{x}+e^{x}-\frac{1}{1-x}=\frac{(1+x)(1-x)e^{x}-1}{1-x}$，

令 $k(x)=(1+x)(1-x)e^{x}-1$，所以 $k'(x)=(1-x^{2}-2x)e^{x}>0$，

所以 $k(x)>k(0)>0$，所以 $y'>0$，

所以 $a-c>0$，所以 $a>c$.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上．若该球的体积为 36π，且 $3\leqslant l\leqslant 3\sqrt{3}$，则该正四棱雉体积的取值范围是

A. $[18,\frac{81}{4}]$　　B. $[\frac{27}{4},\frac{81}{4}]$　　C. $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$　　D. $[18,27]$

【答案】C

【解析】记三棱锥高与侧棱夹角为 θ，高为 h，底面中心到各顶点的距离为 m，

$\cos\theta=\frac{3^{2}+l^{2}-3^{2}}{2\times 3\times l}=\frac{l}{6}\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$，则 $l=6\cos\theta$，$m=l\cdot\sin\theta=6\sin\theta\cos\theta$，

$h=\frac{m}{\tan\theta}=\frac{6\sin\theta\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=6\cos^{2}\theta$，$S_{底}=\frac{1}{2}\times 2m\times 2m=2m^{2}$，

故 $V=\frac{1}{3}S_{底}\cdot h=\frac{1}{3}\times 2m^{2}h=144(\sin\theta\cos^{2}\theta)^{2}$，

令 $y=\sin\theta\cos^{2}\theta=\sin\theta(1-\sin^{2}\theta)=x(1-x^{2})=-x^{3}+x, x=\sin\theta\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$y'=-3x^2+1$，故 $x\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3})$， $y'<0$， $x\in(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}]$， $y'>0$，

即 $V_{\max}=144{y_{\max}}^2=144\times[\frac{\sqrt{3}}{3}\times(\frac{\sqrt{6}}{3})^2]^2=\frac{64}{3}$，

$V_{\min}=144\times(\frac{\sqrt{3}}{2}\times(\frac{1}{2})^2)^2=\frac{27}{4}$.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则

A．直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$

B．直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C．直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$

D．直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

【答案】ABD

【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $BC_1\perp B_1C$， $BC_1\perp A_1B_1$，所以 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1CD，所以 $BC_1\perp DA_1$， $BC_1\perp CA_1$，故选项 A，B 均正确；

设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O$，因为 $A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，所以直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $\angle C_1BO$，在直角 $\triangle C_1BO$ 中， $\sin\angle C_1BO=\frac{C_1O}{BC_1}=\frac{1}{2}$，故 $\angle C_1BO=30°$，故选项 C 错误；

直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle C_1BC=45°$，故选项 D 正确．综上，答案选 ABD.

10．已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则

A． $f(x)$ 有两个极值点

B． $f(x)$ 有三个零点

C．点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

D．直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

【答案】AC

【解析】 $f'(x)=3x^2-1$，所以 $f(x)$ 有两个极值点 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $f(\frac{\sqrt{3}}{3})=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，所以 $f(x)$ 只有一个零点；由 $f(x)+f(-x)=2$ 可知，点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心；曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y=2x-1$，所以答案选 AC.

11．已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 C： $x^2=2py$（ $p>0$ ）上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P,Q 两点，则

A． C 的准线为 $y=-1$

B．直线 AB 与 C 相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$　　　　D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

【答案】BCD

【解析】由题意可知：$1=2p$，所以抛物线C：$x^2=y$，故C的准线为$y=-\dfrac{1}{4}$，故 A 不对；

由$y'=2x$得曲线C在点$A(1,1)$处的切线斜率为 2，所以切线方程为$y=2x-1$，故直线AB与C相切；

过点$B(0,-1)$的直线设为$y=kx-1$，交C于P,Q两点的坐标分别设为$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

联立直线与C方程可得$\begin{cases}x^2=y\\y=kx-1\end{cases}\Rightarrow x^2-kx+1=0$，所以有$x_1+x_2=k,x_1x_2=1$，

且$\Delta=k^2-4>0$，即$k^2>4$，进一步可得$y_1+y_2=k^2-2,y_1y_2=1$，此时

$$|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{(x_1{}^2+y_1{}^2)(x_2{}^2+y_2{}^2)}=\sqrt{(y_1+y_1{}^2)(y_2+y_2{}^2)}=\sqrt{y_1y_2(y_1y_2+y_1+y_2+1)}=\sqrt{k^2}>4$$

又$|OA|^2=2$，所以 C 正确；

$|BP|\cdot|BQ|=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(x_1,y_1+1)\cdot(x_2,y_2+1)=x_1x_2+y_1y_2+y_1+y_2+1=k^2+1>5$，又$|BA|^2=5$，故 D 正确；综上，答案选 BCD.

12. 已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，记$g(x)=f'(x)$. 若$f(\dfrac{3}{2}-2x)$，$g(2+x)$均为偶函数，则

A. $f(0)=0$　　B. $g(-\dfrac{1}{2})=0$　　C. $f(-1)=f(4)$　　D. $g(-1)=g(2)$

【答案】BC

【解析】由$f(\dfrac{3}{2}-2x)$为偶函数可知$f(x)$关于直线$x=\dfrac{3}{2}$对称，

由$g(2+x)$为偶函数可知：$g(x)$关于直线$x=2$对称，

结合$g(x)=f'(x)$，根据$g(x)$关于直线$x=2$对称可知$f(x)$关于点$(2,t)$对称，

根据$f(x)$关于直线$x=\dfrac{3}{2}$对称可知：$g(x)$关于点$(\dfrac{3}{2},0)$对称，

综上，函数$f(x)$与$g(x)$均是周期为 2 的周期函数，所以有$f(0)=f(2)=t$，所以 A 不正确；

$f(-1)=f(1)$，$f(4)=f(2)$，$f(1)=f(2)$，故$f(-1)=f(4)$，所以 C 正确.

$g(-\dfrac{1}{2})=g(\dfrac{3}{2})=0$，$g(-1)=g(1)$，所以 B 正确；

又$g(1)+g(2)=0$，所以$g(-1)+g(2)=0$，所以 D 不正确.

故选 BC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(1-\frac{y}{x})(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为__________（用数字作答）.

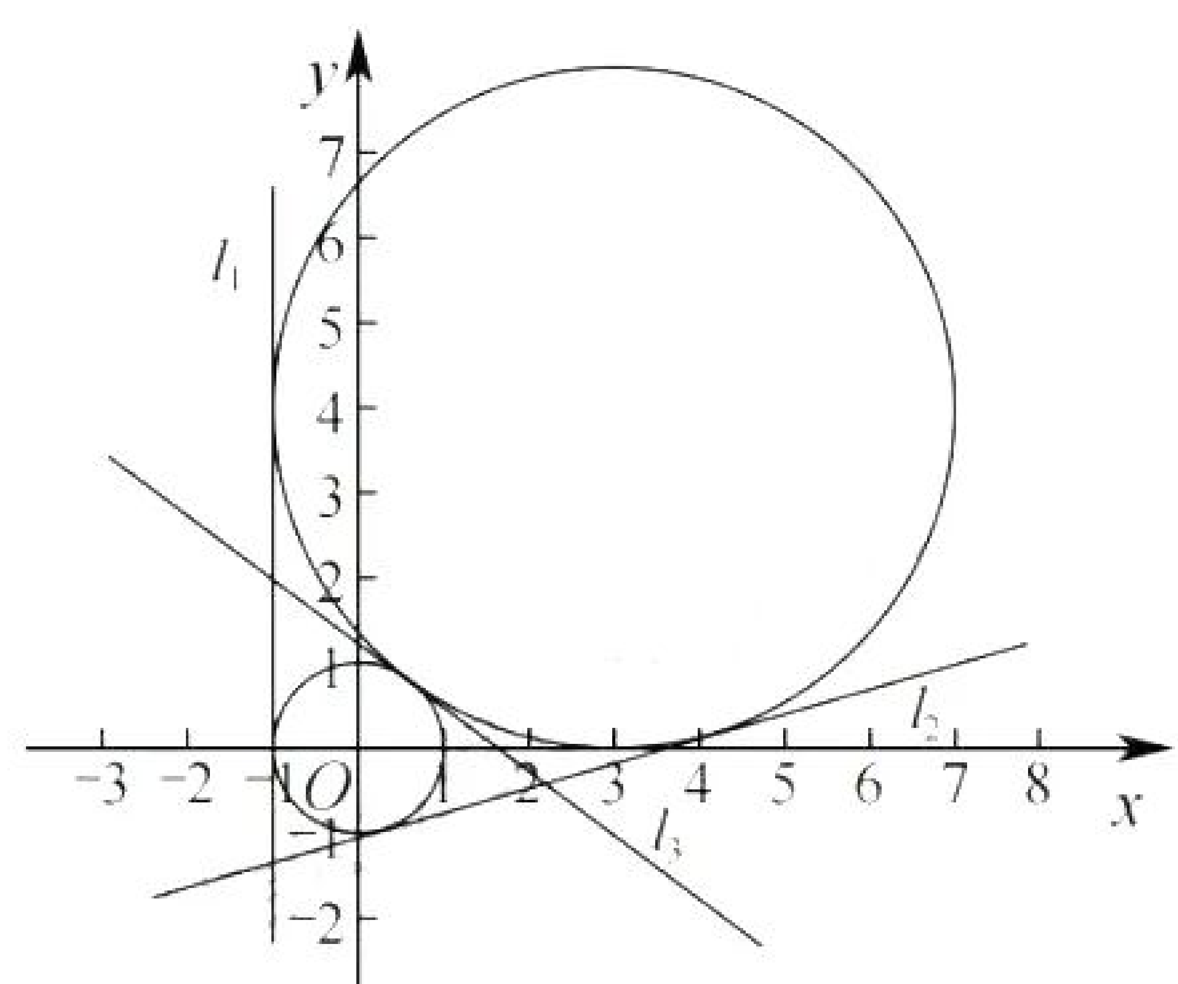
【答案】-28

【解析】原式等于 $(x+y)^8-\frac{y}{x}(x+y)^8$，由二项式定理，其展开式中 x^2y^6 的系数为 $C_8^2-C_8^3=-28$.

14. 写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程__________.

【答案】$x=-1$，或 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$，或 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$（答对其中之一即可）

【解析】由图可得，两圆外切，且均与直线 $l_1: x=-1$ 相切。另过两圆圆心的直线 l 的方程为 $y=\frac{4}{3}x$，可得 l 与 l_1 交点为 $P(-1,-\frac{4}{3})$. 由切线定理得，两圆另一公切线 l_2 过点 P，设 $l_2: y+\frac{4}{3}=k(x+1)$，由点到直线距离公式可得 $\frac{\left|k-\frac{4}{3}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\frac{7}{24}$，即 $l_2: y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$. 另由于两圆外切，因此在公切点处存在公切线 l_3 与 l 垂直，解得 $l_3: y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.



15. 若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是____________.

【答案】$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

【解析】易得曲线不过原点，设切点为 $\left(x_0,(x_0+a)e^{x_0}\right)$，则切线斜率为

$f'(x_0)=(x_0+a+1)e^{x_0}$. 可得切线方程为 $y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+a+1)e^{x_0}(x-x_0)$，又切线过原点，

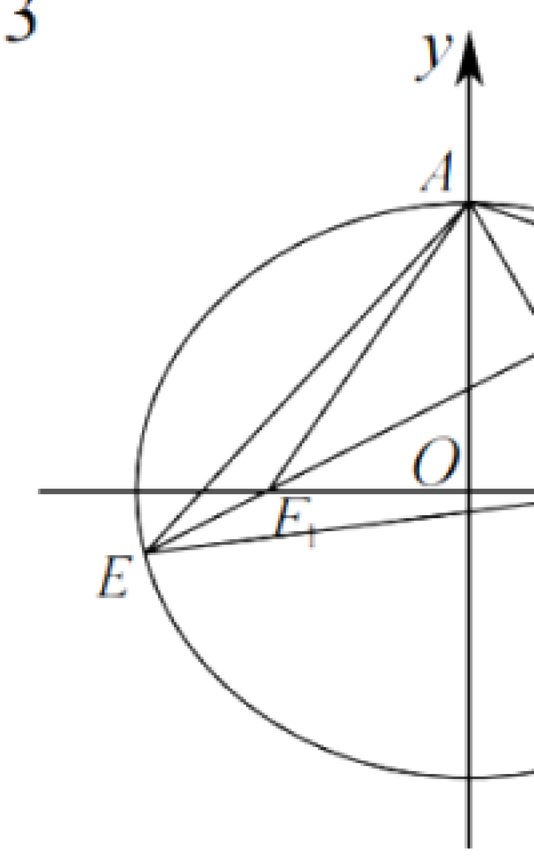
可得 $-(x_0+a)e^{x_0}=-x_0(x_0+a+1)e^{x_0}$，化简得 ${x_0}^2+ax_0-a=0$（※），又切线有两条，即※

方程有两不等实根，由判别式 $\Delta=a^2+4a>0$，得 $a<-4$，或 $a>0$.

16. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$，则 $\triangle ADE$ 的周长是________.

【答案】13

【解析】椭圆离心率为 $\dfrac{1}{2}$，不妨设 $C:\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，且 $\triangle AF_1F_2$ 为正三角形，则直线 DE 斜率 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 由等腰三角形性质可得，$|AE|=|EF_2|$，$|AD|=|DF_2|$，由椭圆性质得 $\triangle ADE$ 的周长等价于 $|DE|+|DF_2|+|EF_2|=4a$. 另设直线 DE 方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$，与椭圆方程联立得 $13x^2+8cx-32c^2=0$.



由弦长公式 $|DE|=\sqrt{k^2+1}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ 得

$|DE|=\sqrt{\dfrac{1}{3}+1}\cdot\sqrt{(-\dfrac{8c}{13})^2+\dfrac{128c^2}{13}}=\dfrac{48}{13}c=6$，即 $c=\dfrac{13}{8}$，$4a=8c=13$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\{\dfrac{S_n}{a_n}\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 得通项公式；

（2）证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

【解析】:（1）$S_1=a_1=1$，所以 $\dfrac{S_1}{a_1}=1$，

所以 $\{\dfrac{S_n}{a_n}\}$ 是首项为 1，公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列，

所以 $\dfrac{S_n}{a_n}=1+(n-1)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{n+2}{3}$，所以 $S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n+2}{3}a_n-\dfrac{n+1}{3}a_{n-1}$，

所以 $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$（$n\geqslant 2$）；

累积法可得：$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$（$n\geqslant 2$），又 $a_1=1$ 满足该式，

所以$\{a_n\}$得通项公式为$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

（2）$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}]$

$=2(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$=2(1-\dfrac{1}{n+1})<2$.

18.（12 分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

（1）若$C=\dfrac{2\pi}{3}$，求B；

（2）求$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值.

【解析】（1）由已知条件得：$\sin 2B+\sin A\sin 2B=\cos A+\cos A\cos 2B$

$\sin 2B=\cos A+\cos A\cos 2B-\sin A\sin 2B=\cos A+\cos(A+2B)$

$=\cos[\pi-(B+C)]+\cos[\pi-(B+C)+2B]$

$=-\cos(B+C)+\cos[\pi+(B-C)]$

$=-2\cos B\cos C$

所以$2\sin B\cos B=-2\cos B\cos C$，即$(\sin B+\cos C)\cos B=0$，

由已知条件：$1+\cos 2B\neq 0$，则$B\neq\dfrac{\pi}{2}$，可得$\cos B\neq 0$，

所以$\sin B=-\cos C=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{\pi}{6}$.

（2）由（1）知$\sin B=-\cos C>0$，则$B=C-\dfrac{\pi}{2}$，$\sin B=\sin(C-\dfrac{\pi}{2})=-\cos C$，

$\sin A=\sin(B+C)=\sin(2C-\dfrac{\pi}{2})=-\cos 2C$，

由正弦定理$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\dfrac{\cos^2 2C+\cos^2 C}{\sin^2 C}$

$=\dfrac{(1-2\sin^2 C)^2+(1-\sin^2 C)}{\sin^2 C}$

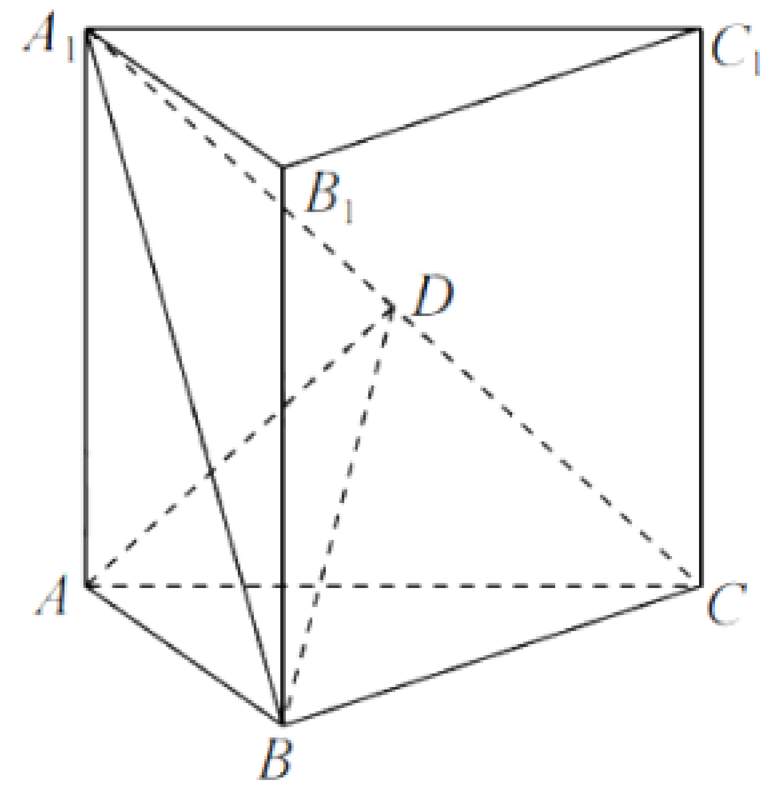
$=\dfrac{2+4\sin^4 C-5\sin^2 C}{\sin^2 C}=\dfrac{2}{\sin^2 C}+4\sin^2 C-5$

$\geqslant 2\sqrt{\dfrac{2}{\sin^2 C}\cdot 4\sin^2 C}-5=4\sqrt{2}-5$，

当且仅当$\sin^2 C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立，所以$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值为$4\sqrt{2}-5$.

19.（12 分）

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.



（1）求 A 到平面 A_1BC 的距离；

（2）设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.

【解析】（1）设 A 到平面 A_1BC 的距离为 h，

$$V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1A=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\times 4=\frac{4}{3},$$

$$V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\cdot h,$$

所以 $\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\cdot h=\frac{4}{3}$，所以 $h=\sqrt{2}$，所以 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.

（3）取 A_1B 的中点 E，连接 AE，

因为 $AA_1=AB$，所以 $AE\perp A_1B$，

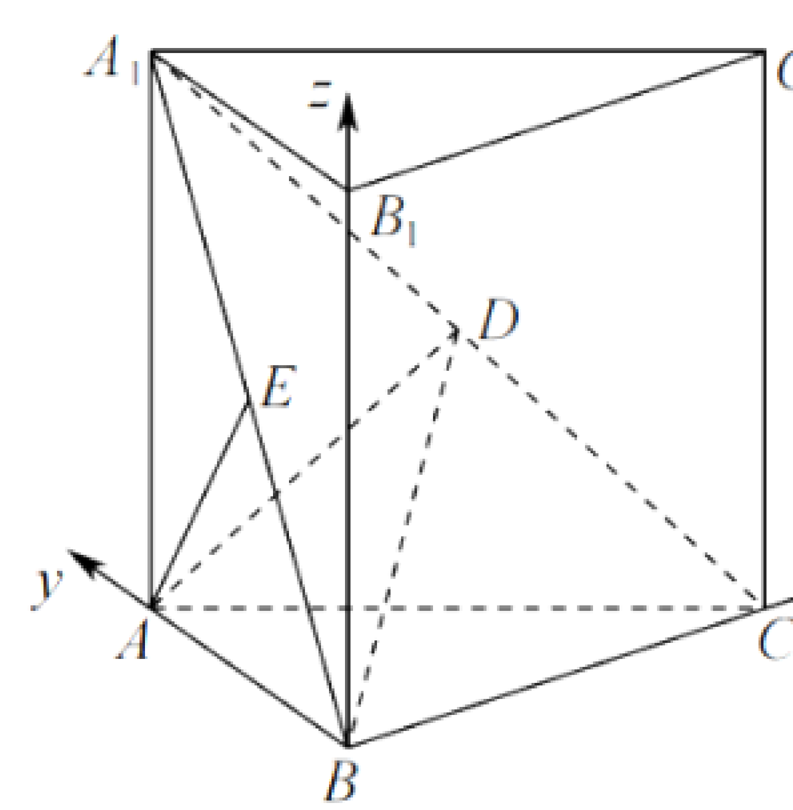
因为平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$，

所以 $AE\perp$ 平面 A_1BC，$AE=\sqrt{2}$，则 $AA_1=AB=2$，所以 $AE\perp BC$，

因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C$，所以 $A_1A\perp BC$，

因为 $AE\cap A_1A=A$，所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A，所以 $BC\perp AB$，

由 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot A_1A=\frac{1}{2}\times 2\times BC\times 2=4$，所以 $BC=2$，



以 BC 为 x 轴，BA 为 y 轴，BB_1 为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

所以 $B(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$A_1(0,2,2)$，$E(0,1,1)$，$D(1,1,1)$

平面 BDC 的法向量设为 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AE}=(0,-1,1)$，平面 BDA 的法向量设为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{BA}=(0,2,0),\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}2y=0\\ x+y+z=0\end{cases}$，所以 $y=0$，

设 $x=1$，则 $z=-1$，所以 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,-1)$，所以 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=-\dfrac{1}{2}$，

设二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 α，则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

20.（12 分）

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

（1）能否有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

（2）从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”，$\dfrac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\dfrac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R.

（i）证明：$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$；

（ii）利用该调查数据，给出 $P(A|B)$，$P(A|\bar{B})$ 的估计值，并利用（i）的结果给出 R 的估计值.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【解析】（1）假设患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯没有差异，

则 $K^2=\dfrac{200(40\times90-60\times10)^2}{50\times150\times100\times100}=24>10.828$，

所以有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异；

（2）（i） $R=\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}\cdot\dfrac{P(\overline{B}|\overline{A})}{P(B|\overline{A})}=\dfrac{\dfrac{P(AB)}{P(A)}}{\dfrac{P(A\overline{B})}{P(A)}}\cdot\dfrac{\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}}{\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}}=\dfrac{P(AB)}{P(A\overline{B})}\cdot\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A}B)}$

$$=\frac{P(AB)}{P(\overline{A}B)}\cdot\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(A\overline{B})}=\frac{\dfrac{P(AB)}{P(B)}}{\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}}\cdot\frac{\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}}{\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}}=\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\frac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$$，得证；

（ii）由调查数据可知 $P(A|B)=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$， $P(A|\overline{B})=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$，

则 $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=\dfrac{3}{5}$， $P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{9}{10}$，所以 $R=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}\cdot\dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}}=6$.

21.（12 分）

已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$ 上，直线 l 交 C 于 P， Q 两点，直线 AP， AQ 的斜率之和为 0.

（1）求 l 的斜率；

（2）若 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求 ΔPAQ 的面积.

【答案】（1） l 的斜率为 0；（2） $\triangle PAQ$ 的面积为 $\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$

【解析】（1）将点 A 代入双曲线方程得 $\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{a^2-1}=1$，化简得 $a^4-4a^2+4=0$ 得：

$a^2=2$，故双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$；

由题显然直线 l 的斜率存在，设 $l:y=kx+m$，设 $P(x_1,y_1)Q(x_2,y_2)$，则联立直线与双曲线得： $(2k^2-1)x^2+4kmx+2m^2+2=0$，

故 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2-1}$， $x_1x_2=\dfrac{2m^2+2}{2k^2-1}$，

$$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{kx_1+m-1}{x_1-2}+\frac{kx_2+m-1}{x_2-2}=0,$$

化简得：$2kx_1x_2+\left(m-1-2k\right)\left(x_1+x_2\right)-4\left(m-1\right)=0$，

故 $\dfrac{2k\left(2m^2+2\right)}{2k^2-1}+\left(m-1-2k\right)\left(-\dfrac{4km}{2k^2-1}\right)-4\left(m-1\right)=0$，

即 $\left(k+1\right)\left(m+2k-1\right)=0$，而直线 l 不过 A 点，故 $k=-1$．

（2）设直线 AP 的倾斜角为 α，由 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，得 $\tan\dfrac{\angle PAQ}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $2\alpha+\angle PAQ=\pi$，得 $k_{AP}=\tan\alpha=\sqrt{2}$，即 $\dfrac{y_1-1}{x_1-2}=\sqrt{2}$，

联立 $\dfrac{y_1-1}{x_1-2}=\sqrt{2}$，及 $\dfrac{x_1^2}{2}-y_1^2=1$ 得 $x_1=\dfrac{10-4\sqrt{2}}{3}$，$y_1=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3}$，

代入直线 l 得 $m=\dfrac{5}{3}$，故 $x_1+x_2=\dfrac{20}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{68}{9}$

而 $\left|AP\right|=\sqrt{3}\left|x_1-2\right|$，$\left|AQ\right|=\sqrt{3}\left|x_2-2\right|$，

由 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，得 $\sin\angle PAQ=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

故 $S_{\triangle PAQ}=\dfrac{1}{2}\left|AP\right|\left|AQ\right|\sin\angle PAQ=\sqrt{2}\left|x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+4\right|=\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$．

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g\left(x\right)=ax-\ln x$ 有相同的最小值．

（1）求 a；

（2）证明：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f\left(x\right)$ 和 $y=g\left(x\right)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列．

【解析】（1）$f'\left(x\right)=e^x-a$，$g'\left(x\right)=a-\dfrac{1}{x}$

① $a\leqslant 0$ 时，$f'\left(x\right)>0$ 恒成立，所以 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，即 $f\left(x\right)$ 没有最小值．

该类情况应舍去．

② $a>0$ 时，$f'\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln a\right)$ 上小于 0，在 $\left(\ln a,+\infty\right)$ 上大于 0，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处有最小值为 $f(\ln a)=a-a\ln a$，

所以 $g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上小于 0，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上大于 0，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处有最小值为 $g\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$，

因为 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

所以有 $f(\ln a)=a-a\ln a=g\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$，即 $a-a\ln a=1+\ln a$

因为 $a>0$，所以上式等价于 $\ln a-\frac{a-1}{a+1}=0$，

令 $h(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}(x>0)$，

则 $h'(x)=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

又因为 $h(1)=0=h(a)$ 且 $a>0$，所以 $a=1$.

（2）证明：由（1）$f(x)=\mathrm{e}^x-x$，$g(x)=x-\ln x$，

且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(x)_{\min}=g(x)_{\min}=1$.

①$b<1$ 时，此时 $f(x)_{\min}=g(x)_{\min}=1>b$，显然 $y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有 0 个交点，不符合题意；

②$b=1$ 时，此时 $f(x)_{\min}=g(x)_{\min}=1=b$，$y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有 2 个交点，交点的横坐标分别为 0 和 1；

③$b>1$ 时，首先，证明 $y=b$ 与曲线 $y=f(x)$ 有 2 个交点：

即证明 $F(x)=f(x)-b$ 有 2 个零点，$F'(x)=f'(x)=e^x-1$，

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $F(-b)=\mathrm{e}^{-b}>0$，$F(0)=1-b<0$，$F(b)=\mathrm{e}^b-2b>0$，

（令 $t(b)=\mathrm{e}^b-2b$，则 $t'(b)=\mathrm{e}^b-2>0$，$t(b)>t(1)=\mathrm{e}-2>0$）

所以明 $F(x)=f(x)-b$ 在 $(-\infty,0)$ 上存在且只存在 1 个零点，设为 x_1，在 $(0,+\infty)$ 上存在且只存在 1 个零点，设为 x_2.

其次，证明 $y=b$ 与曲线和有 2 个交点：

即证明 $G(x)=g(x)-b$ 有 2 个零点，$G'(x)=g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，

所以 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $G\left(\mathrm{e}^{-b}\right)=\mathrm{e}^{-b}>0$，$G(0)=1-b<0$，$G(2b)=b-\ln 2b>0$，

（令 $\mu(b)=b-\ln 2b$，则 $\mu'(b)=1-\dfrac{1}{b}>0$，$\mu(b)>\mu(1)=1-\ln 2>0$）

所以 $F(x)=f(x)-b$ 在 $(0,1)$ 上存在且只存在 1 个零点，设为 x_3，在 $(1,+\infty)$ 上存在且只存在 1 个零点，设为 x_4.

再次，证明存在 b 使得 $x_2=x_3$：

因为 $F(x_2)=G(x_3)=0$，所以 $b=\mathrm{e}^{x_2}-x_2=x_3-\ln x_3$，

若 $x_2=x_3$，则 $\mathrm{e}^{x_2}-x_2=x_2-\ln x_2$，即 $\mathrm{e}^{x_2}-2x_2+\ln x_2=0$，

所以只需证明 $\mathrm{e}^x-2x+\ln x=0$ 在 $(0,1)$ 上有解即可，

即 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-2x+\ln x$ 在 $(0,1)$ 上有零点，

因为 $\varphi\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^3}-3<0$，$\varphi(1)=\mathrm{e}-2>0$，

所以 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-2x+\ln x$ 在 $(0,1)$ 上存在零点，取一零点为 x_0，令 $x_2=x_3=x_0$ 即可，

此时取 $b=\mathrm{e}^{x_0}-x_0$

则此时存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点

最后证明 $x_1+x_4=2x_0$，即从左到右的三个交点的横坐标成等差数列：

因为 $F(x_1)=F(x_2)=F(x_0)=0=G(x_3)=G(x_0)=G(x_4)$，

所以 $F(x_1)=G(x_0)=F(\ln x_0)$，

又因为 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$x_1<0$，$0<x_0<1$ 即 $\ln x_0<0$，所以 $x_1=\ln x_0$

同理，因为 $F(x_0)=G(e^{x_0})=G(x_4)$，

又因为 $G(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$x_0>0$ 即 $e^{x_0}>1$，$x_1>1$，所以 $x_4=e^{x_0}$，

又因为 $e^{x_0}-2x_0+\ln x_0=0$，所以 $x_1+x_4=e^{x_0}+\ln x_0=2x_0$，

即直线 $y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.