2022年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若集合$M=\{x\mid\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x\mid 3x\geqslant 1\}$，则$M\cap N=$

A．$\{x\mid 0\leqslant x<2\}$　　B．$\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x<2\}$

C．$\{x\mid 3\leqslant x<16\}$　　D．$\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x<16\}$

2．若$\mathrm{i}(1-z)=1$，则$z+\bar{z}=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

3．在$\triangle ABC$中，点D在边AB上，$BD=2DA$．记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则$\overrightarrow{CB}=$

A．$3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　B．$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$　　C．$3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　D．$2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

4　南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库．已知该水库水位为海拔$148.5\ \mathrm{m}$时，相应水面的面积为$140.0\ \mathrm{km}^2$；水位为海拔$157.5\ \mathrm{m}$时，相应水面的面积为$180.0\ \mathrm{km}^2$．将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔$148.5\ \mathrm{m}$上升到$157.5\ \mathrm{m}$时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）

A．$1.0\times 10^9\ \mathrm{m}^3$　　B．$1.2\times 10^9\ \mathrm{m}^3$　　C．$1.4\times 10^9\ \mathrm{m}^3$　　D．$1.6\times 10^9\ \mathrm{m}^3$

5．从2至8的7个整数中随机取2个不同的数，则这2个数互质的概率为

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

6. 记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})+b\ (\omega>0)$ 的最小正周期为 T．若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(\frac{3\pi}{2},2)$ 中心对称，则 $f(\frac{\pi}{2})=$

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

7. 设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上．若该球的体积为 36π，且 $3\leqslant l\leqslant 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是

A. $[18,\frac{81}{4}]$　　B. $[\frac{27}{4},\frac{81}{4}]$　　C. $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$　　D. $[18,27]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则

A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$

B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$

D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

10. 已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则

A. $f(x)$ 有两个极值点　　B. $f(x)$ 有三个零点

C. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心　　D. 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P，Q 两点，则

A. C 的准线为 $y=-1$　　B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$　　D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$．若 $f(\frac{3}{2}-2x)$，$g(2+x)$ 均为偶函数，则

A. $f(0)=0$　　B. $g(-\frac{1}{2})=0$　　C. $f(-1)=f(4)$　　D. $g(-1)=g(2)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(1-\frac{y}{x})(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为________（用数字作答）.

14. 写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程________.

15. 若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是________.

16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$. 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$，则 $\triangle ADE$ 的周长是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\{\frac{S_n}{a_n}\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

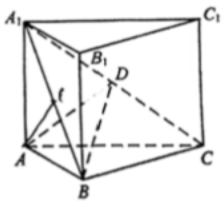
18.（12 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

（1）若 $C=\frac{2\pi}{3}$，求 B；

（2）求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

19.（12 分）



如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

（1）求 A 到平面 A_1BC 的距离；

（2）设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.

20.（12分）

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了100例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了100人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

（1）能否有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

（2）从该地的人群中任选一人，A表示事件"选到的人卫生习惯不够良好"，B表示事件"选到的人患有该疾病"，$\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}$与$\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})}$的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为R.

（i）证明：$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$；

（ii）利用该调查数据，给出$P(A|B)$，$P(A|\overline{B})$的估计值，并利用（i）的结果给出R的估计值.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

.

21.（12分）

已知点$A(2,1)$在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1\,(a>1)$上，直线$l$交$C$于$P$，$Q$两点，直线$AP$，$AQ$的斜率之和为$0$.

（1）求l的斜率；

（2）若$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求$\triangle PAQ$的面积.

22.（12分）

已知函数$f(x)=e^x-ax$和$g(x)=ax-\ln x$有相同的最小值.

（1）求a；

（2）证明：存在直线$y=b$，其与两条曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.