成都市2018级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1. C； 2. D； 3. A； 4. D； 5. C； 6. B； 7. B； 8. A； 9. C； 10. B； 11. D； 12. C.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\frac{3}{2}$； 14. $\frac{1}{2}$； 15. $2\sqrt{3}$； 16. ①②④.

三、解答题:(共70分)

17. 解:(Ⅰ)由题意,知 $4+x+20+38+30=100$. $\therefore x=8$. ……2分

在这100份作业中,因大三学生的作业共 $3+6+15+y+12=36+y$ (份),

则大四学生的作业共 $64-y$ (份).

$\because$ 选修该门课程的大三与大四学生的人数之比为3∶2,

$\therefore \frac{36+y}{64-y}=\frac{3}{2}$. 解得 $y=24$. ……4分

故这100份作业中大三学生作业共60份.

设大三学生作业的平均成绩为 $\bar{x}$.

则 $\bar{x}=\frac{3}{60}\times 55+\frac{6}{60}\times 65+\frac{15}{60}\times 75+\frac{24}{60}\times 85+\frac{12}{60}\times 95=81$.

$\therefore$ 估计这100份作业中大三学生作业的平均成绩为81分. ……6分

(Ⅱ)在这100份作业的样本中,成绩在 $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$ 的大四学生作业份数分别是1,2,5.

故成绩在 $[50,80)$ 的作业有8份,则 X 的所有可能取值为0,1,2. ……7分

$\because P(X=0)=\frac{C_2^0C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$, $P(X=1)=\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{3}{7}$, $P(X=2)=\frac{C_2^2C_6^0}{C_8^2}=\frac{1}{28}$,

……10分

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

$\therefore$ 随机变量 X 的数学期望 $EX=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{1}{28}=\frac{1}{2}$. ……12分

18. 解:(Ⅰ)$\because a_{n+2}+3a_n=4a_{n+1}, n\in \mathbf{N}^*$，$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$． ……1分

$\because b_n=a_{n+1}-a_n$，$\therefore b_{n+1}=3b_n$． ……2分

又 $b_1=a_2-a_1=2$，

$\therefore$数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，3 为公比的等比数列． ……4分

$\therefore b_n=2\times 3^{n-1}$． ……6分

(Ⅱ)$\because b_n=a_{n+1}-a_n$，

$\therefore a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$ ……7分

$=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1+a_1=\dfrac{2(1-3^n)}{1-3}+1=3^n$． ……9分

$\therefore c_n=\log_3(a_n+b_n)=\log_3 3^n=n$． ……10分

$\therefore S_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$． ……11分

$\therefore S_{20}=\dfrac{20\times 21}{2}=210$. ……12分

19. 解:(Ⅰ)如图，设 AC 与 BD 的交点为 O，连接 EO．

$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AC\perp BD$，且 O 为 BD，AC 的中点. ……1分

$\because EB=ED$，$\therefore BD\perp EO$． ……2分

$\because AC, EO\subset$ 平面 $ACFE$，$AC\cap EO=O$，

$\therefore BD\perp$ 平面 $ACFE$． ……4分

又 $BD\subset$ 平面 BDF，

$\therefore$ 平面 $BDF\perp$ 平面 $ACFE$． ……5分

(Ⅱ)$\because$四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle DAB=\dfrac{\pi}{3}$，则 $BD=2$.

$\therefore OB=OD=1$.

又 $AC=2AO=\sqrt{3}AB=2\sqrt{3}$，$EF=\dfrac{1}{4}AC$，$\therefore EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……6分

$\because EF\,/\!/\,AC$，$\therefore$ 四边形 $ACFE$ 是梯形.

$\because O$ 为 AC 的中点，$EA=EC$，$\therefore EO\perp AC$．

$\therefore$ 梯形 $ACFE$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3})\cdot OE=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\cdot OE$． ……7分

又由(Ⅰ)知 $BD\perp$ 平面 $ACFE$．

$\therefore V_{ABCDEF}=V_{B-ACFE}+V_{D-ACFE}=2V_{B-ACFE}$

$$=2\times\frac{1}{3}S\cdot OB=2\times\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{4}\cdot OE\times 1=\frac{5}{2}.$$

$\therefore OE=\sqrt{3}$． ……8分

以 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OE}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$．

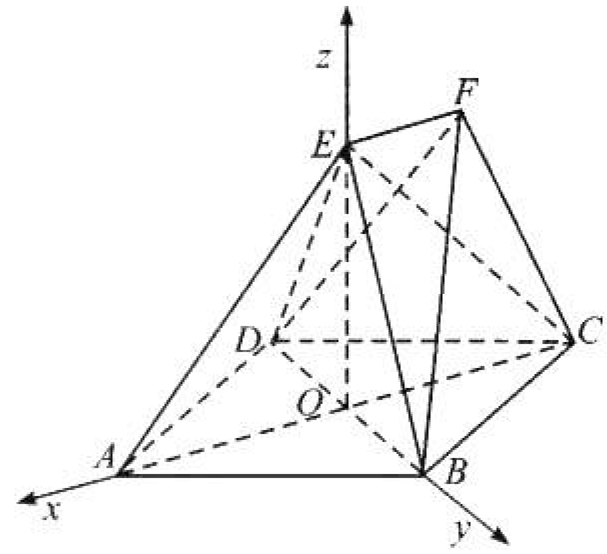
则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$E(0,0,\sqrt{3})$，

$D(0,-1,0)$，$F(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\sqrt{3})$．

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BD}=(0,-2,0)$，$\overrightarrow{BF}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\sqrt{3})$．

……9 分



设平面 ABE，平面 BDF 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$．

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+y_1=0\\ -\sqrt{3}x_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$．令 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},1)$．

……10 分

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-2y_2=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2-y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$．令 $x_2=2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,0,1)$．

……11 分

$\because \cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2+1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$，

$\therefore$平面 ABE 与平面 BDF 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{3}{5}$．　　……12 分

20. 解：（Ⅰ）$\because$椭圆 C 的四个顶点围成的四边形的面积为 $2\sqrt{5}$，

$\therefore \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=2\sqrt{5}$，即 $ab=\sqrt{5}$．　　……1 分

$\because$点 $F_2(c,0)(c>0)$ 到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $\frac{|c+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore c=2$．　　……2 分

又 $a^2=b^2+c^2$，$\therefore a^2=\frac{5}{a^2}+4$，即 $a^4-4a^2-5=0$．

解得 $a^2=5$ 或 $a^2=-1$（舍去）．　　……3 分

$\therefore b^2=1$．

$\therefore$椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$．　　……4 分

（Ⅱ）由题意，直线 l 的斜率存在且不为 0．设直线 l 的方程为 $x=my-3$．

由 $\begin{cases}x=my-3\\ \frac{x^2}{5}+y^2=1\end{cases}$，消去 x，得 $(m^2+5)y^2-6my+4=0$．　　……5 分

由 $\Delta=20(m^2-4)>0$，得 $m<-2$ 或 $m>2$．　　……6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$N(x_N,y_N)$．

则 $y_1+y_2=\frac{6m}{m^2+5}$，$y_1y_2=\frac{4}{m^2+5}$．　　……7 分

设过点 F_2 与直线 l 垂直的直线的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+2$.

由 $\begin{cases}x=my-3,\\ x=-\frac{1}{m}y+2\end{cases}$，解得 $y_N=\frac{5m}{m^2+1}$. ……8 分

$\because\triangle AF_2M$ 与 $\triangle BF_2N$ 面积相等，$\therefore\frac{1}{2}|MA|\cdot|F_2N|=\frac{1}{2}|BN|\cdot|F_2N|$，

$\therefore|MA|=|BN|$，即 MA,BN 在 y 轴上的投影相等.

则 $|y_1-0|=|y_N-y_2|$. ……10 分

$\because$ 点 A,B 在点 M,N 之间，$\therefore y_1+y_2=y_N$，即 $\frac{6m}{m^2+5}=\frac{5m}{m^2+1}$.

解得 $m=\pm\sqrt{19}$，满足 $m<-2$ 或 $m>2$. ……11 分

$\therefore$直线 l 的方程为 $x+\sqrt{19}y+3=0$ 或 $x-\sqrt{19}y+3=0$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ)当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f'(x)=-\sin x+x$. ……1 分

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=-\cos x+1$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. 显然 $g'(x)\geqslant 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增. ……2 分

又 $g(0)=0$，$\therefore$当 $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递减，在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增. ……3 分

$\because f(0)=1$，$f(\frac{\pi}{2})=f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{8}$，$\therefore$函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,\frac{\pi^2}{8}]$. ……4 分

(Ⅱ)$\because f(-x)=\cos(-x)-a(-x)^2=\cos x-ax^2=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的偶函数.

$\therefore$“函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点”等价于“函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点”.

因 $f'(x)=-\sin x-2ax$，设 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=-\cos x-2a$. ……5 分

①当 $a\geqslant 0$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，则 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减. $\therefore h(x)\leqslant h(0)=0$.

则 $f'(x)\leqslant 0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，无极小值. ……6 分

②当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，则 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增. $\therefore h(x)\geqslant h(0)=0$.

则 $f'(x)\geqslant 0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，无极小值. ……7 分

③当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $h'(x_0)=-\cos x_0-2a=0$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时，$h'(x) < 0$；当 $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x) > 0$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

$\because h(0) = 0$，$\therefore h(x_0) < 0$. 又 $h(\frac{\pi}{2}) = -1 - a\pi$，

(ⅰ)当 $-1 - a\pi \leqslant 0$，即 $-\frac{1}{\pi} \leqslant a < 0$ 时，$h(\frac{\pi}{2}) \leqslant 0$.

$\therefore f'(x) \leqslant 0$，此时 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减，无极小值. ……8 分

(ⅱ)当 $-1 - a\pi > 0$，即 $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{\pi}$ 时，$h(\frac{\pi}{2}) > 0$.

则存在 $t \in (x_0, \frac{\pi}{2})$，使得 $h(t) = -\sin t - 2at = 0$. …(*)

当 $x \in (0, t)$ 时，$f'(x) < 0$；当 $x \in (t, \frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, t)$ 上单调递减，在 $(t, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增. ……9 分

$\therefore$函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点 $x_2 = t$. 此时，$x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

$\therefore$当函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点时，a 的取值范围为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi})$.

……10 分

$\because x_1 + x_2 = 0$，

若 $f(x_2 - x_1) = 1 + \frac{1}{9}(x_2 - x_1)^2$，则 $\cos 2x_2 - 4a x_2^2 = 1 + \frac{4}{9} x_2^2$.

由(*)式，知 $\sin x_2 = -2a x_2$. $\therefore 1 - 8a^2 x_2^2 - 4a x_2^2 = 1 + \frac{4}{9} x_2^2$. ……11 分

整理得 $x_2^2(3a + 1)(6a + 1) = 0$.

$\because x_2 \neq 0$，$a \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi})$，$\therefore a = -\frac{1}{3}$.

$\therefore$存在 $a = -\frac{1}{3}$，使得 $f(x_2 - x_1) = 1 + \frac{1}{9}(x_2 - x_1)^2$ 成立. ……12 分

22. 解：(Ⅰ)消去曲线 C 的参数方程中的参数 k，得 $y^2 = 2x$. ……2 分

$\therefore$曲线 C 的普通方程为 $y^2 = 2x$. ……3 分

整理 $\rho\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$，可得 $\rho\cos\theta + \rho\sin\theta = \sqrt{2}$. ……4 分

$\because \rho\cos\theta = x$，$\rho\sin\theta = y$，$\therefore$直线 l 的普通方程为 $x + y - \sqrt{2} = 0$. ……5 分

(Ⅱ)将直线 l 的普通方程化为参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} t \end{cases}$ (t 为参数). ……6 分

代入 $y^2=2x$，整理可得 $t^2+2\sqrt{2}t-4\sqrt{2}=0$. $\cdots(*)$

而 $\Delta=(2\sqrt{2})^2-4\times1\times(-4\sqrt{2})=8+16\sqrt{2}>0$. ……7 分

设 t_1,t_2 是方程$(*)$的两个实数根.

则 $t_1+t_2=-2\sqrt{2}$，$t_1t_2=-4\sqrt{2}$. ……8 分

$\therefore |PM|^2+|QM|^2=t_1{}^2+t_2{}^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=8+8\sqrt{2}$. ……10 分

23. 解：(Ⅰ)①当 $x\leqslant-2$ 时，$f(x)=x^2-x-10$. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4,+\infty)$； ……1 分

②当 $-2<x<2$ 时，$f(x)=-x^2+x+2$. 函数 $f(x)$ 在 $(-2,\frac{1}{2})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{2},2)$ 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 的值域为 $(-4,\frac{9}{4}]$； ……2 分

③当 $x\geqslant2$ 时，$f(x)=x^2+x-6$. 函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增. 此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$； ……3 分

由题意，及函数 $f(x)$ 的图象知 $m=-4$. ……5 分

(Ⅱ) $\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}$ 与 $\frac{1}{4}$ 的大小关系为：$\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}\geqslant\frac{1}{4}$.

证明如下：由 $a+b+2m=0$ 及 $m=-4$，知 $a+b=8$. ……6 分

$\because a>0,b>0$，

$\therefore \frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}=\frac{1}{16}[(a+3)+(b+5)](\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5})$ ……8 分

$=\frac{1}{16}(2+\frac{b+5}{a+3}+\frac{a+3}{b+5})\geqslant\frac{1}{16}(2+2\sqrt{\frac{b+5}{a+3}\cdot\frac{a+3}{b+5}})=\frac{1}{4}$.

当且仅当 $\frac{b+5}{a+3}=\frac{a+3}{b+5}$，即 $a=5,b=3$ 时等号成立. ……9 分

$\therefore \frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}\geqslant\frac{1}{4}$. ……10 分