成都市2018级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1. C; **2.** D; **3.** A; **4.** D; **5.** C; **6.** B; **7.** B; **8.** A; **9.** C; **10.** B; **11.** D; **12.** C.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\dfrac{3}{2}$; **14.** $-\dfrac{1}{8}$; **15.** $2\sqrt{3}$; **16.** ①②④.

三、解答题:(共70分)

17.解:(Ⅰ)由题意,知 $4+x+20+38+30=100$. $\therefore x=8$. ……2分

在这100份作业中,因大三学生的作业共 $3+6+15+y+12=36+y$ (份),

则大四学生的作业共 $64-y$ (份).

$\because$ 选修该门课程的大三与大四学生的人数之比为 $3:2$,

$\therefore \dfrac{36+y}{64-y}=\dfrac{3}{2}$. 解得 $y=24$. ……4分

故大四学生作业共40份.其中,成绩在 $[60,70)$, $[70,80)$ 的作业份数分别为2, 5.

故成绩在 $[60,80)$ 的作业共7份. ……5分

$\therefore$ 从选修该门课程的大四学生中随机选取1名,估计其作业成绩在 $[60,80)$ 的概率为 $\dfrac{7}{40}$. ……7分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,这100份作业中大三学生作业共60份. ……8分

设大三学生作业的平均成绩为 $\bar{x}$.

则 $\bar{x}=\dfrac{3}{60}\times 55+\dfrac{6}{60}\times 65+\dfrac{15}{60}\times 75+\dfrac{24}{60}\times 85+\dfrac{12}{60}\times 95=81$.

$\therefore$ 估计这100份作业中大三学生作业的平均成绩为81分. ……12分

18.解:(Ⅰ)$\because a_{n+2}+3a_n=4a_{n+1}, n\in \mathbf{N}^*$, $\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$. ……1分

$\because b_n=a_{n+1}-a_n$, $\therefore b_{n+1}=3b_n$. ……2分

又 $b_1=a_2-a_1=2$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以2为首项,3为公比的等比数列. ……4分

$\therefore b_n=2\times 3^{n-1}$. ……6分

(Ⅱ)$\because b_n=a_{n+1}-a_n$,

$\therefore a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$ ……7分

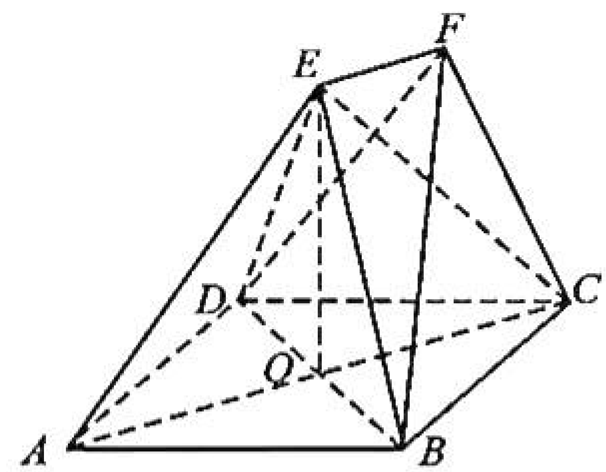
$=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1+a_1=\dfrac{2(1-3^n)}{1-3}+1=3^n$. ……9分

$\therefore c_n = \log_3(a_n + b_n) = \log_3 3^n = n$. ……10 分

$\therefore S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. ……11 分

$\therefore S_{20} = \dfrac{20 \times 21}{2} = 210$. ……12 分

19. 解:(Ⅰ)如图,设 AC 与 BD 的交点为 O ,连接 EO .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore AC \perp BD$,且 O 为 BD,AC 的中点. ……1 分

$\because EB = ED$,$\therefore BD \perp EO$. ……2 分

$\because AC, EO \subset$ 平面 $ACFE$,$AC \cap EO = O$,

$\therefore BD \perp$ 平面 $ACFE$. ……4 分

又 $BD \subset$ 平面 BDF ,

$\therefore$ 平面 $BDF \perp$ 平面 $ACFE$. ……5 分

(Ⅱ)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,$\angle DAB = \dfrac{\pi}{3}$,则 $BD = 2$.

$\therefore OB = OD = 1$. ……6 分

在 $\text{Rt}\triangle EOB$ 中,$\because BO = 1, EB = 2$,则 $EO = \sqrt{3}$. ……7 分

又 $AC = 2AO = \sqrt{3}AB = 2\sqrt{3}$,$EF = \dfrac{1}{4}AC$,$\therefore EF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……8 分

$\because EF \parallel AC$,$\therefore$ 四边形 $ACFE$ 是梯形.

$\because O$ 为 AC 的中点,$EA = EC$,$\therefore EO \perp AC$. ……9 分

$\therefore$ 梯形 $ACFE$ 的面积 $S = \dfrac{1}{2} \times (\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = \dfrac{15}{4}$. ……10 分

又由(Ⅰ)知 $BD \perp$ 平面 $ACFE$.

$\therefore V_{ABCDEF} = V_{B-ACFE} + V_{D-ACFE} = 2V_{B-ACFE}$

$= 2 \times \dfrac{1}{3}S \cdot OB = 2 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{15}{4} \times 1 = \dfrac{5}{2}$.

$\therefore$ 多面体 $ABCDEF$ 的体积为 $\dfrac{5}{2}$. ……12 分

20. 解:(Ⅰ)$\because$ 椭圆 C 的四个顶点围成的四边形的面积为 $2\sqrt{5}$,

$\therefore \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2\sqrt{5}$,即 $ab = \sqrt{5}$. ……1 分

$\because$ 点 $F_2(c, 0)(c > 0)$ 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $\dfrac{|c+2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore c = 2$. ……2 分

又 $a^2 = b^2 + c^2$,$\therefore a^2 = \dfrac{5}{a^2} + 4$,即 $a^4 - 4a^2 - 5 = 0$.

解得 $a^2 = 5$ 或 $a^2 = -1$(舍去). ……3 分

$\therefore b^2 = 1$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{5} + y^2 = 1$. ……4 分

(Ⅱ)由题意,直线 l 的斜率存在且不为 0. 设直线 l 的方程为 $x=my-3$.

由 $\begin{cases}x=my-3\\ \dfrac{x^2}{5}+y^2=1\end{cases}$,消去 x,得 $(m^2+5)y^2-6my+4=0$. ……5 分

由 $\Delta=20(m^2-4)>0$,得 $m<-2$ 或 $m>2$. ……6 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$N(x_N,y_N)$.

则 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{m^2+5}$,$y_1y_2=\dfrac{4}{m^2+5}$. ……7 分

设过点 F_2 与直线 l 垂直的直线的方程为 $x=-\dfrac{1}{m}y+2$.

由 $\begin{cases}x=my-3,\\ x=-\dfrac{1}{m}y+2\end{cases}$,解得 $y_N=\dfrac{5m}{m^2+1}$. ……8 分

$\because |MA|=|BN|$,$\therefore MA,BN$ 在 y 轴上的投影相等,即 $|y_1-0|=|y_N-y_2|$.
……9 分

$\because$点 A,B 在点 M,N 之间,$\therefore y_1+y_2=y_N$,即 $\dfrac{6m}{m^2+5}=\dfrac{5m}{m^2+1}$.

解得 $m=\pm\sqrt{19}$,满足 $m<-2$ 或 $m>2$. ……11 分

$\therefore$直线 l 的方程为 $x+\sqrt{19}y+3=0$ 或 $x-\sqrt{19}y+3=0$. ……12 分

21. 解:(Ⅰ)当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2$,则 $f'(x)=-\sin x+x$. ……1 分

设 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=-\cos x+1$,$x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$. 显然 $g'(x)\geqslant 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增. 则当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时,$g(x)\geqslant g(0)=0$. ……2 分

$\therefore$ 当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时,$f'(x)\geqslant 0$. $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增. ……4 分

又 $f(0)=1$,$f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi^2}{8}$,$\therefore$函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,\dfrac{\pi^2}{8}]$. ……5 分

(Ⅱ)因 $f'(x)=-\sin x-2ax$,设 $h(x)=f'(x)$,则 $h'(x)=-\cos x-2a$. ……6 分

①当 $a\geqslant 0$ 时,$h'(x)\leqslant 0$,则 $h(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递减. $\therefore h(x)\leqslant h(0)=0$,

则 $f'(x)\leqslant 0$. 此时 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递减,无极值. ……7 分

②当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时,$h'(x)\geqslant 0$,则 $h(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

$\therefore h(x)\geqslant h(0)=0$,则 $f'(x)\geqslant 0$. 此时 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增,无极值.
……8 分

③当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时,存在 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,使 $h'(x_0)=-\cos x_0-2a=0$.

当 $x \in (0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x \in (x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)>0$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增. ……9 分

$\because h(0)=0$，$\therefore h(x_0)<0$. 又 $h(\frac{\pi}{2})=-1-a\pi$，

(ⅰ)当 $-1-a\pi \leqslant 0$，即 $-\frac{1}{\pi} \leqslant a<0$ 时，$h(\frac{\pi}{2}) \leqslant 0$.

$\therefore f'(x) \leqslant 0$，此时 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，无极值. ……10 分

(ⅱ)当 $-1-a\pi>0$，即 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{\pi}$ 时，$h(\frac{\pi}{2})>0$.

则存在 $x_1 \in (x_0,\frac{\pi}{2})$，使 $h(x_1)=-\sin x_1-2ax_1=0$.

当 $x \in (0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x \in (x_1,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 $(x_1,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增. ……11 分

$\therefore x_1$ 是函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的极小值点，且为唯一的极值点.

综上，当函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上有唯一极值点时，a 的取值范围为 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\pi})$.

……12 分

22. 解：(Ⅰ)消去曲线 C 的参数方程中的参数 k，得 $y^2=2x$. ……2 分

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $y^2=2x$. ……3 分

整理 $\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=1$，可得 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=\sqrt{2}$. ……4 分

$\because \rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，$\therefore$ 直线 l 的普通方程为 $x+y-\sqrt{2}=0$. ……5 分

(Ⅱ)将直线 l 的普通方程化为参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). ……6 分

代人 $y^2=2x$，整理可得 $t^2+2\sqrt{2}t-4\sqrt{2}=0$. …(*)

而 $\Delta=(2\sqrt{2})^2-4\times 1\times(-4\sqrt{2})=8+16\sqrt{2}>0$. ……7 分

设 t_1,t_2 是方程(*)的两个实数根.

则 $t_1+t_2=-2\sqrt{2}$，$t_1t_2=-4\sqrt{2}$. ……8 分

$\therefore |PM|^2+|QM|^2={t_1}^2+{t_2}^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=8+8\sqrt{2}$. ……10 分

23. 解：(Ⅰ)①当 $x \leqslant -2$ 时，$f(x)=x^2-x-10$. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4,+\infty)$； ……1 分

②当 $-2<x<2$ 时，$f(x)=-x^2+x+2$. 函数 $f(x)$ 在 $(-2,\frac{1}{2})$ 上单调递增，

在 $(\frac{1}{2},2)$ 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 的值域为 $(-4,\frac{9}{4}]$； ……2 分

③当 $x \geqslant 2$ 时，$f(x)=x^2+x-6$. 函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增. 此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$； ……3 分

由题意，及函数 $f(x)$ 的图象知 $m=-4$. ……5 分

(Ⅱ) $\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}$ 与 $\frac{1}{4}$ 的大小关系为：$\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5} \geqslant \frac{1}{4}$.

证明如下：由 $a+b+2m=0$ 及 $m=-4$，知 $a+b=8$. ……6 分

$\because a>0, b>0$，

$\therefore \frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}=\frac{1}{16}[(a+3)+(b+5)](\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5})$ ……8 分

$=\frac{1}{16}(2+\frac{b+5}{a+3}+\frac{a+3}{b+5}) \geqslant \frac{1}{16}(2+2\sqrt{\frac{b+5}{a+3}\cdot\frac{a+3}{b+5}})=\frac{1}{4}$.

当且仅当 $\frac{b+5}{a+3}=\frac{a+3}{b+5}$，即 $a=5, b=3$ 时等号成立. ……9 分

$\therefore \frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5} \geqslant \frac{1}{4}$. ……10 分