2020年全国统一高考数学试卷（理科）（全国新课标III）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in N^*,y\geq x\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．6

【答案】：C

【解析】：点 $(4,4)$，$(3,5)$，$(2,6)$，$(1,7)$ 符合题意，故选：C．

2．复数 $\frac{1}{1-3i}$ 的虚部是

A．$-\frac{3}{10}$　　B．$-\frac{1}{10}$　　C．$\frac{1}{10}$　　D．$\frac{3}{10}$

【答案】：D

【解析】：$\frac{1}{1-3i}=\frac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{1+3i}{10}$，故选：$D$．

3．在一组样本数据中，1，2，3，4出现的频率分别为 p_1，p_2，p_3，p_4，且 $\sum_{i=1}^{4}p_i=1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是

A．$p_1=p_4=0.1$，$p_2=p_3=0.4$　　B．$p_1=p_4=0.4$，$p_2=p_3=0.1$

C．$p_1=p_4=0.2$，$p_2=p_3=0.3$　　D．$p_1=p_4=0.3$，$p_2=p_3=0.2$

【答案】：B

【解析】：答案A：$E(x)=1\times0.1+2\times0.4+3\times0.4+4\times0.1=2.5$，所以

$D(x)=(1-2.5)^2\times0.1+(2-2.5)^2\times0.4+(3-2.5)^2\times0.4+(4-2.5)^2\times0.1=0.65$；

同理有答案B：$E(x)=2.5$，$D(x)=2.05$；答案C：$E(x)=2.5$，$D(x)=1.05$；答案D：$E(x)=2.5$，$D(x)=1.45$．故选：B．

4．Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域.有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（t 的单位：天）的 Logistic 模型：$I(t)=\dfrac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数.当 $I(t^{*})=0.95K$ 时，标志已初步遏制疫情，则 t^{*} 约为（$\ln 19\approx 3$）

A．60　　B．63　　C．66　　D．69

【答案】：C

【解析】：由已知有 $\dfrac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}=0.95K$，得 $e^{-0.23(t-53)}=\dfrac{1}{19}$，两边取对数有 $-0.23(t-53)=-\ln 19$，解得 $t=66$．故选：C．

5．设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 D，E 两点，若 $OD\perp OE$，则的焦点坐标为

A．$(\dfrac{1}{4},0)$　　B．$(\dfrac{1}{2},0)$　　C．$(1,0)$　　D．$(2,0)$

【答案】：B

【解析】：将 $x=2$ 代入 $y^2=2px(p>0)$ 得 $y=\pm 2\sqrt{p}$.由 $OD\perp OE$ 得 $k_{OD}\cdot k_{OE}=-1$，即 $\dfrac{2\sqrt{p}}{2}\cdot\dfrac{-2\sqrt{p}}{2}=-1$，得 $p=1$，所以抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点坐标为 $F(\dfrac{1}{2},0)$．故选 B．

6．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$，则 $\cos<\vec{a},\vec{a}+\vec{b}>=$

A．$-\dfrac{31}{35}$　　B．$-\dfrac{19}{35}$　　C．$\dfrac{17}{35}$　　D．$\dfrac{19}{35}$

【答案】：D

【解析】：由 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=25-6=19$，又 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=7$，所以 $\cos<\vec{a},\vec{a}+\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{19}{5\times 7}=\dfrac{19}{35}$，故选：$D$．

7．在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\cos B=$

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】：A

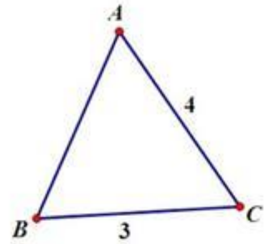


图 1

【解析】：如图 1，由余弦定理可知：

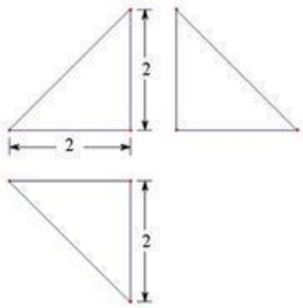
$$\cos C=\frac{2}{3}=\frac{|BC|^2+|AC|^2-|AB|^2}{2|BC|\cdot|AC|}=\frac{3^2+4^2-|AB|^2}{2\times3\times4},$$

可得 $|AB|=3$，又由余弦定理可知：

$$\cos B=\frac{|AB|^2+|BC|^2-|AC|^2}{2|AB|\cdot|BC|}=\frac{3^2+3^2-4^2}{2\times3\times3}=\frac{1}{9}.$$

故选：A.

8．右图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是



A. $6+4\sqrt{2}$　　B. $4+4\sqrt{2}$

C. $6+2\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$

【答案】：C

【解析】：由题 2 可知：该几何体是边长为 2 的几何体的一个角，如图所示，其面积为：

$S=3\times\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\sin60^\circ=6+2\sqrt{3}$，故选：C.

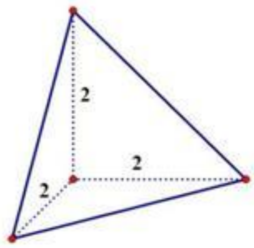


图 2

9．已知 $2\tan\theta-\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=7$，则 $\tan\theta=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【答案】：D

【解析】：由题可知 $2\tan\theta-\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=7$，化解得：$2\tan\theta-2\tan^2\theta-1-\tan\theta=7-7\tan\theta$，

解得：$\tan\theta=2$．故选：D.

10．若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和圆 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 相切，则 l 的方程为

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x+\frac{1}{2}$　　C. $y=\frac{1}{2}x+1$　　D. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

【答案】：D

【解析】：由与圆相切，故圆心$(0,0)$到直线的距离为圆半径$r=\frac{\sqrt{5}}{5}$，符合条件的只有A，D，将答案A的直线方程带入$y=\sqrt{x}$，得：$2x-\sqrt{x}+1=0$，无解；将答案AD的直线方程带入$y=\sqrt{x}$，得：$x-2\sqrt{x}+1=0$，有一解$x=1$．故选：D.

11．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点$F_1,F_2$，离心率为$\sqrt{5}$.$P$是$C$上的一点，且$F_1P\perp F_2P$.若$\Delta PF_1F_2$的面积为4，则$a=$

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【答案】：A

【解析】：法一:由题意知：双曲线的焦点三角形面积为$S_{PF_1F_2}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.所以$\frac{b^2}{\tan 45^\circ}=4$，

则$b=2$，又因为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，所以$a=1$．故选：A.

法二：设$PF_1=m,PF_2=n$，则$S_{PF_1F_2}=mn=4$，$m-n=2a$，

$m^2+n^2=4c^2,e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，求的$a=1$．故选：A.

12．已知$5^5<8^4$，$13^4<8^5$．设$a=log_5 3$，$b=log_8 5$，$c=log_{13}8$，则

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

【答案】：A

【解析】：易知$a,b,c\in(0,1)$

由$\frac{a}{b}=\frac{log_5 3}{log_8 5}=log_5 3\cdot log_5 8<\frac{(log_5 3+log_5 8)^2}{4}=\frac{(log_5 24)^2}{4}<\frac{2^2}{4}=1$，知$a<b$

因为$b=log_8 5$，$c=log_{13}8$，所以$8^b=5$，$13^c=8$

即$8^{5b}=5^5$，$13^{4c}=8^4$又因为$5^5<8^4$，$13^4<8^5$

所以$13^{4c}=8^4>5^5=8^{5b}>13^{4b}$，即$b<c$，

综上所述：$a<b<c$．故选：A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 0\\2x-y\geqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最大值是______.

【答案】：7

【解析】：易知当 x，y 为直线 $\begin{cases}2x-y=0\\x=1\end{cases}$ 的交点 $(1,2)$ 时 z 有最大值 7.

14. $(x^2+\frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是____________（用数字作答）.

【答案】：240

【解析】：因为 $T_{r+1}=C_6^r x^{2(6-r)}2^r x^{-r}=2^r C_6^r x^{12-3r}$，由 $12-3r=0$ 得 $r=4$，所以常数项为 240.

15. 已知圆锥的底面半径为1，母线长为3，则该圆锥内半径最大的球的体积为______.

【答案】：$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

【解析】：分析知圆锥内半径最大的球的应为该圆锥的内切球，如下图，由题可知该圆锥的母线长为 $BS=3$，底面半径为 $BC=1$，

高为 $SC=\sqrt{BS^2-BC^2}=2\sqrt{2}$，

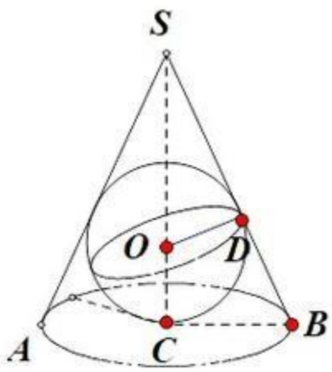
不妨设该内切圆与母线 BS 切于 D 点，

令 $OD=OC=r$，

则由 $\Delta SOD\sim\Delta SBC$，可得 $\frac{OD}{OS}=\frac{BC}{BS}$，

即 $\frac{r}{2\sqrt{2}-r}=\frac{1}{3}$，得 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

此时 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.



16. 关于函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$.

① $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称；

② $f(x)$ 的图像关于原点对称；

③ $f(x)$ 的图像关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称；

④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是______.

【答案】：②③

【解析】：对于①，由 $\sin x\neq 0$ 可得函数的定义域为 $\{x|x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，故定义域关于原点对称，由 $f(-x)=\sin(-x)+\frac{1}{\sin(-x)}=-\sin x-\frac{1}{\sin x}=-f(x)$，所以该函数为奇函数，关于原点对称，①错②对；

对于③，由 $f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\frac{1}{\sin(\pi-x)}=\sin x+\frac{1}{\sin x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，③对；

对于④，令 $t=\sin x$，则 $t\in[-1,0)\cup(0,1]$，由双勾函数 $g(t)=t+\frac{1}{t}$ 的性质，可知 $g(t)\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，所以 $f(x)$ 无最小值，④错.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1) 计算 a_2，a_3，猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明；

(2) 求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前项和 S_n.

【答案】：（1）$a_n=2n+1$；（2）$S_n=(2n-1)2^{n+1}+2$.

【解析】：（1）由 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$，$a_2=3a_1-4=5$ ，$a_3=3a_2-4\times 2=7$，…

猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$.

证明如下：（数学归纳法）当 $n=1,2,3$ 时，显然成立；　　①

假设$n=k$时，即$a_k=2k+1$成立；其中$(k\in N^*)$，

由$a_{k+1}=3a_k-4k=3(2k+1)-4k=2(k+1)+1$ ②

故假设成立，综上① ②，所以$a_n=2n+1\ (n\in N^*)$

（2）令$b_n=2^n a_n=(2n+1)2^n$，则前项和$S_n=b_1+b_2+...+b_n=3\times2^1+5\times2^2+...+(2n+1)2^n$ ③

由③两边同乘以 2 得：$2S_n=3\times2^2+5\times2^3+...+(2n-1)2^n+(2n+1)2^{n+1}$ ④

由③－④的$-S_n=3\times2+2\times2^2+...+2^n-(2n+1)2^{n+1}=6+\dfrac{2^3(1-2^{n-2})}{1-2}-(2n+1)2^{n+1}$

化简得$S_n=(2n-1)2^{n+1}+2$.

18.（12 分）

某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）：

锻炼人次 / 空气质量等级	$[0,200]$	$(200,400]$	$(400,600]$
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为 1，2，3，4 的概率；

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同一组中的数据用改组区间的中点值为代表）；

（3）若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天“空气质量不好”.根据所给数据，完成下列的2×2列联表，并根据列联表，判断是否有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关？

	人次≤400	人次>400
空气质量好		
空气质量不好		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.025	0.010
k	3.841	5.024	6.635

【答案】：（1）$\dfrac{43}{100},\dfrac{27}{100},\dfrac{21}{100},\dfrac{9}{100}$；（2）350；（3）有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关

【解析】：（1）根据上面的统计数据，可得

该市一天的空气质量等级为 1 的概率为$\dfrac{2+16+25}{100}=\dfrac{43}{100}$，

该市一天的空气质量等级为 2 的概率为$\dfrac{5+10+12}{100}=\dfrac{27}{100}$，

该市一天的空气质量等级为 3 的概率为$\dfrac{6+7+8}{100}=\dfrac{21}{100}$，

该市一天的空气质量等级为 4 的概率为$\dfrac{7+2+0}{100}=\dfrac{9}{100}$；

（2）由题意，计算得 $\overline{x}=100\times0.20+300\times0.35+500\times0.45=350$

（3）列联表如下：

	人次≤400	人次>400	总计
空气质量好	33	37	70
空气质量不好	22	8	30
总计	55	45	100

由表中数据可得：$K^2=\dfrac{100\times(33\times8-37\times22)^2}{70\times30\times55\times45}\approx5.820>3.841$，

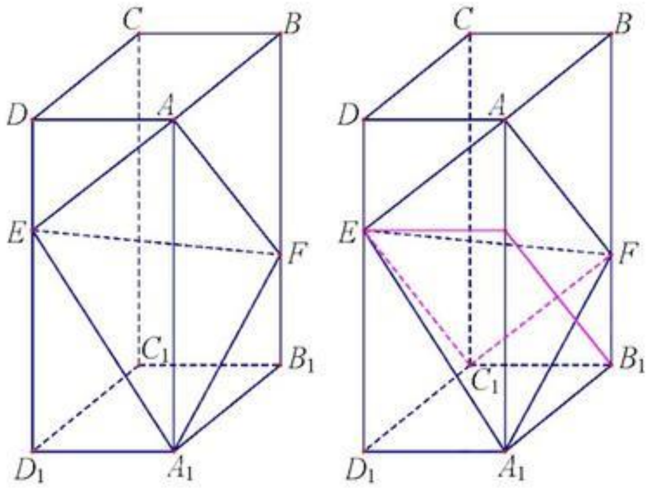
所以有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关.

19.（12 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别在棱 DD_1，BB_1 上且 $2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$.

（1）证明：点 C_1 在平面 AEF 内；

（2）若 $AB=2$，$AD=1$，$AA_1=3$，求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值．



【答案】：（1）略；（2）二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$．

【解析】：证明：(1) 在 AA_1 上取一点 M，使得 $A_1M=2AM$，分别连接 EM，B_1M，EC_1，

FC_1

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，有 $DD_1 // AA_1 // BB_1$，且 $DD_1=AA_1=BB_1$，

又 $2DE=ED_1$，$A_1M=2AM$，$BF=2FB_1$，所以 $DE=AM=FB_1$，

所以四边形 B_1FAM 和四边形 $EDAM$ 都是平行四边形．

所以 $AF // MB_1$ 且 $AF=MB_1$，$AD // ME$ 且 $AD=ME$，

又在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，有 $AD // B_1C_1$ 且 $AD=B_1C_1$，

所以 $B_1C_1 // ME$ 且 $B_1C_1=ME$，则四边形 B_1C_1EM 为平行四边形，

所以 $EC_1 // MB_1$ 且 $EC_1=MB_1$，又 $AF // MB_1$ 且 $AF=MB_1$，

所以 $AF // EC_1$ 且 $AF=EC_1$，则四边形 AFC_1E 为平行四边形，

所以点 C_1 在平面 AEF 内．

解：(2) 在长方形 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以 C_1 为原点，C_1D_1 所在直线为 y 轴，C_1B_1 的直

线为y轴，C_1C所在直线为z轴，建立如图所示的空间直角坐标系C_1-xyz，

因为$AB=2$，$AD=1$，$AA_1=3$，$2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$，

所以$A(2,1,3)$，$E(2,0,2)$，$F(0,1,1)$，$A_1(2,1,0)$，

则$\overrightarrow{EF}=(-2,1,-1)$，$\overrightarrow{AE}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{A_1E}=(0,-1,2)$，

设平面AEF的一个法向量为$\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x_1+y_1-z_1=0\\ -y_1-z_1=0\end{cases}$，取法向量$\vec{n_1}=(1,1,-1)$，

设平面A_1EF的一个法向量为$\vec{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\vec{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{n_2}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x_2+y_2-z_2=0\\ -y_2+2z_2=0\end{cases}$，取法向量$\vec{n_2}=(1,4,-2)$

所以$\cos<\vec{n_1},\vec{n_2}>=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\dfrac{1+4-2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，

设二面角$A-EF-A_1$为θ，则$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{1}{7}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

即二面角$A-EF-A_1$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

20.（12分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$A$，$B$分别为$C$的左右顶点.

（1）求C的方程；

（2）若点P在C上，点Q在直线$x=6$上，且$|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求$\triangle APQ$的面积.

【答案】：（1）$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{16y^2}{25}=1$；（2）$\dfrac{5}{2}$

【解析】：（1）由$e=\dfrac{c}{a}$，得$e^2=1-\dfrac{b^2}{a^2}$，即$\dfrac{15}{16}=1-\dfrac{m^2}{25}$，所以$m^2=\dfrac{25}{16}$.

故C的方程为$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{16y^2}{25}=1$.

（2）设点P的坐标为(s,t)，点Q的坐标为$(6,n)$，根据对称性，只需考虑$n>0$的情

形，此时 $-5<s<5$，$0<t\leqslant\frac{5}{4}$.

因为 $|BP|=|BQ|$，所以有 $(s-5)^2+t^2=n^2+1$ ①.

又因为 $BP\perp BQ$，所以 $s-5+nt=0$ ②.

又 $\frac{s^2}{25}+\frac{16t^2}{25}=1$ ③.

联立①、②、③，可得，$\begin{cases}s=3\\t=1\\n=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}s=-3\\t=1\\n=8\end{cases}$.

当 $\begin{cases}s=3\\t=1\\n=2\end{cases}$ 时，$\dot{AP}=(8,1)$，$\dot{AQ}=(11,2)$.

所以 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\sqrt{\dot{AP}^2\cdot\dot{AQ}^2-(\dot{AP}\cdot\dot{AQ})^2}=\frac{1}{2}|8\times2-11\times1|=\frac{5}{2}$.

同理可得，当 $\begin{cases}s=-3\\t=1\\n=8\end{cases}$ 时，$S_{\triangle APQ}=\frac{5}{2}$.

综上所述，可得 $\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{5}{2}$.

21.（12 分）

设 $f(x)=x^3+bx+c,x\in R$，曲线 $f(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{2},\ f(\frac{1}{2})\right)$ 处的切线与 y 轴垂直.

（1）求 b；

（2）若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于1的零点，证明：$f(x)$ 的所有零点的绝对值都不大于1.

【答案】：（1）$b=-\frac{3}{4}$；（2）略.

【解析】：（1）$f'(x)=3x^2+b$，$\therefore f'(\frac{1}{2})=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+b=0,$ 即 $b=-\frac{3}{4}$.

（2）设 x_0 为 $f(x)$ 的一个零点，根据题意，$f(x_0)=x_0^{\ 3}-\frac{3}{4}x_0+c=0$，且 $|x_0|\leq1$，则 $c=-x_0^{\ 3}+\frac{3}{4}x_0$，由 $|x_0|\leq1$，$c'=-3x_0^{\ 2}+\frac{3}{4}$，显然 $c(x_0)$ 在 $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ 单调递减，$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

单调递增，$\left[\frac{1}{2},1\right]$ 单调递减，易得 $c(-1)=\frac{1}{4},c(1)=-\frac{1}{4},c\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},c\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，

$\therefore -\frac{1}{4}\le c\le \frac{1}{4}$.

设 x_1 为 $f(x)$ 的零点，则必有 $f(x_1)=x_1^{\ 3}-\frac{3}{4}x_1+c=0$，即 $-\frac{1}{4}\le c=-x_1^{\ 3}+\frac{3}{4}x_1\le\frac{1}{4}$，

$\therefore\begin{cases}4x_1^{\ 3}-3x_1-1=(x_1-1)(2x_1+1)^2\le 0\\ 4x_1^{\ 3}-3x_1+1=(x_1+1)(2x_1-1)^2\ge 0\end{cases}$，$\therefore -1\le x_1\le 1$，即 $|x_1|\le 1$. 所以 $f(x)$ 的所有零点的绝对值都不大于1.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-t-t^2\\ y=2-3t+t^2\end{cases}$，（$t$ 为参数且 $t\ne 1$），C 与坐标轴交于 A，B 两点.

（1）求 $|AB|$；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线 AB 的极坐标方程.

【答案】:（1）$4\sqrt{10}$；（2）$3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0$.

【解析】:（1）当 $x=0$ 时，求得 $t=-2$ 或 $t=1$（舍）代入 $y=2-3t+t^2$ 中，求得 $y=12$；当 $y=0$ 时，求得 $t=2$ 或 $t=1$（舍）代入 $x=2-t-t^2$ 中，求得 $x=-4$，所以曲线与坐标轴交于（0,12）和（-4,0），故 $|AB|=\sqrt{(-4)^2+12^2}=4\sqrt{10}$.

（2）由（1）得直线 AB 过点（0,12）和（-4,0），所以直线 AB 的解析式为 $3x-y+12=0$，

故直线 AB 的极坐标方程为 $3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0$.

23. [选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

设 $a,b,c\in R,a+b+c=0,\ abc=1$.

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用$\max\{a,b,c\}$表示a,b,c的最大值，证明：$\max\{a,b,c\}\geq\sqrt[3]{4}$.

【答案】:（1）略；（2）略.

【解析】:（1）证明：$\because a+b+c=0,\therefore(a+b+c)^2=0.$

$\therefore a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2ca=0,$ 即 $2ab+2bc+2ca=-\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\therefore 2ab+2bc+2ca<0,\therefore ab+bc+ca<0.$

证明：不妨设$a\leq b<0<c<\sqrt[3]{4}$，则$ab=\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}},-a-b=c>\sqrt[3]{4},$ 而

$\sqrt[3]{4}>-a-b\geq 2\sqrt{ab}>\dfrac{2}{\sqrt[6]{4}}=2^{1-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4}$矛盾，所以命题得证.

【小结】:（1）根据题设条件$a+b+c=0,$两边平方，再利用均值不等式证明即可.

（2）假设出a,b,c中最大值，根据反证法与基本不等式推出矛盾，即可得出结论.