

2020 年全国统一高考数学试卷（文科）（全国新课标Ⅲ）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ ，集合 $B = \{x | 3 < x < 15\}$ ，则 $A \cap B$ 中元素的个数为

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】： B

【解析】： 根据交集的定义 $A \cap B = \{5, 7, 11\}$ 选择 B

2. 若 $\bar{z}(1+i) = 1-i$ ，则 $z =$

- A. $1-i$ B. $1+i$ C. $-i$ D. i

【答案】： D

【解析】： $\bar{z} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2i}{2} = -i$ 互为共轭复数，实部相同，虚部相反数。所

以 $\bar{z} = i$

3. 设一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的方差为 0.01，则数据 $10x_1, 10x_2, \dots, 10x_n$ 的方差为

- A. 0.01 B. 0.1 C. 1 D. 10

【答案】 C

【解析】： 由方差计算公式： x_1, x_2, \dots, x_n 的方差为 s^2 ，则 ax_1, ax_2, \dots, ax_n 的方差为 a^2s^2 ，所以 $s^2 = 0.01$ ，则所求为 $100s^2 = 1$

4. Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用与流行病学领域，由学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位：天) 的 Logistic 模型：

$I(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-53)}}$ ，其中 K 为最大确诊病例数，当 $I(t^*) = 0.95K$ ，标志着已初步遏制疫

情，则 t^* 约为 ($\ln 19 \approx 3$)

- A. 60 B. 63 C. 66 D. 69

【答案】 C

【解析】： $I(t^*) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-53)}} = 0.95K$ ，所以 $e^{-0.23(t-53)} = \frac{1}{19}$ ，所以

$-0.23(t-53) = \ln \frac{1}{19} = -\ln 19$ ，解得 $t = 53 + \frac{3}{0.23} \approx 66$

5. 已知 $\sin \theta + \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$, 则 $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】：根据两角和的正弦公式展开

$$\sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{3}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \sqrt{3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\text{所以 } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

6. 在平面内, A, B 是两个定点, C 是动点, 若 $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 1$, 则 C 的轨迹为

- A. 圆 B. 椭圆 C. 抛物线 D. 直线

【答案】A

【解析】：以 AB 所在直线为 x 轴, 中垂线为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 设 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(x, y)$, 则 $\vec{AC} = (x+a, y)$, $\vec{BC} = (x-a, y)$, $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = x^2 + y^2 - a^2 = 1$, 所以 $x^2 + y^2 = a^2 + 1$, 则轨迹为圆.

7. 设 O 为坐标原点, 直线 $x=2$ 与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 D, E 两点, 若 $OD \perp OE$, 则 C 的焦点坐标为

- A. $(\frac{1}{4}, 0)$ B. $(\frac{1}{2}, 0)$ C. $(1, 0)$ D. $(2, 0)$

【答案】：B

【解析】：根据题意, 设点 $D(2, 2\sqrt{p})$, $E(2, -2\sqrt{p})$, $DE = 4\sqrt{p}$, $OD = OE = \sqrt{4+4p}$, 由 $OD^2 + OE^2 = DE^2$, 可得 $p=1$, 抛物线的方程为 $y^2 = 2x$, 故选 B.

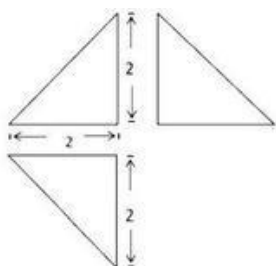
8. 点 $(0,1)$ 到直线 $y = k(x+1)$ 距离的最大值为

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【答案】：B

【解析】：由直线 $y = k(x+1)$ 过定点 $(-1, 0)$, 要使距离最大, 则当过 $(0,1)$ 的直线与 $y = k(x+1)$ 平行时可得, 故最大距离为 $(0,1)$ 和 $(-1, 0)$ 两点之间的距离, 故选 B.

9. 右图为某几何体的三视图, 则该几何体的表面积是



- A. $6+4\sqrt{2}$ B. $4+4\sqrt{2}$ C. $6+2\sqrt{3}$ D. $4+2\sqrt{3}$

【答案】: C

【解析】: 由三视图可知, 该几何体为正方体变化而得, 故表面积为三个相等的两直角边为 2 的直角三角形和一个边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形的面积之和。故选 C

10. 设 $a = \log_3 2$, $b = \log_5 3$, $c = \frac{2}{3}$, 则

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【答案】: A

【解析】: $\because c = \frac{2}{3} \log_3 3 = \log_3 \sqrt[3]{9}$, $a = \log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{8}$, $\therefore a < c$

$\because c = \frac{2}{3} \log_5 5 = \log_5 \sqrt[3]{25}$, $b = \log_5 3 = \log_5 \sqrt[3]{27}$, $\therefore c < b$

故选 A.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{2}{3}$, $AC = 4$, $BC = 3$, 则 $\tan B =$

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $4\sqrt{5}$ D. $8\sqrt{5}$

【答案】: C

【解析】: 法一: 由余弦定理 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C = 9$, 即 $AB = 3$, 再使用余弦定理的推论知 $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{1}{9}$, 又因为 $B \in (0, \pi)$, 所以

$$\tan B = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 B}}{\cos B} = 4\sqrt{5}.$$

法二: 作 B 在 AC 上的射影 H , $HC = BC \cos C = 2$, $HB = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{5}$,

$AH = AC - HC = 2 = HC$, 所以 $\triangle ABC$ 是以 B 为顶点的等腰三角形, $\tan \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

$$\tan B = \frac{2 \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan^2 \frac{B}{2}} = 4\sqrt{5}.$$

12. 已知函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$, 则

- A. $f(x)$ 的最小值为 2
- B. $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称
- C. $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \pi$ 对称
- D. $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

【答案】: D

【解析】: A. 由于 $f(-\frac{\pi}{2}) = -2$, A 错误.

B. $f(x) = f(-x)$ 显然不成立, B 错误.

C. $f(\pi - x) = f(\pi + x)$ 显然不成立, C 错误.

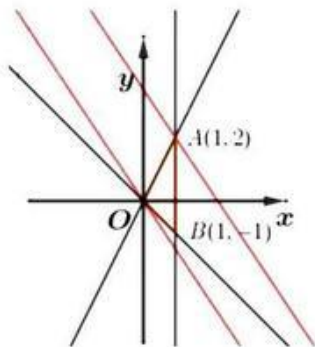
D. 容易验证 $f(\frac{\pi}{2} - x) = f(\frac{\pi}{2} + x)$ 在定义域上恒成立, D 正确.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geq 0, \\ 2x - y \geq 0, \\ x \leq 1, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 4y$ 的最大值为_____.

【答案】 11

【解析】 解析: 如图所示, 当经过 $A(1, 2)$ 时, $z_{\max} = 3 \times 1 + 4 \times 2 = 11$



14. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线为 $y = \sqrt{2}x$, 则 C 的离心率为_____.

【答案】 $\sqrt{3}$.

【解析】 由题意得 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$, 从而 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} = \sqrt{3}$

15. 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x+a}$, 若 $f'(1) = \frac{e}{4}$, 则 $a =$ _____.

【答案】1

【解析】 $f'(x) = \frac{e^x(x+a-1)}{(x+a)^2}$, $f'(1) = \frac{ae}{(1+a)^2} = \frac{e}{4}$, 解得 $a=1$.

16. 已知圆锥的底面半径为1, 母线长为3, 则该圆锥内半径最大的球的体积_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

【解析】该圆锥轴截面为底边长为2, 腰为3的等腰三角形, 其内切圆为该球的大圆, 该三角形的周长为8, 面积为 $2\sqrt{2}$, 由于三角形面积 S , 周长 C 和内切圆半径 R 的关系为 $S = \frac{CR}{2}$, 所以 $R = \frac{2S}{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故该球的体积 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

三、解答题: 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共60分。

17. (12分)

设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 4, a_3 - a_1 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$, 求 m .

【答案】: (1) $a_n = 3^{n-1}$; (2) $m = 6$

【解析】: (1) 设公比为 q , 则由 $\begin{cases} a_1 + a_1q = 4 \\ a_1q^2 - a_1 = 8 \end{cases}$ 得 $a_1 = 1, q = 3$

所以 $a_n = 3^{n-1}$

(2) 由(1)有 $\log_3 a_n = n-1$, 是一个以0为首项, 1为公差的等差数列,

所以 $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$,

所以 $\frac{m(m-1)}{2} + \frac{(m+1)m}{2} = \frac{(m+3)(m+2)}{2}$

解得: $m = 6$ 或 $m = -1$ (舍去)

所以 $m = 6$

18. (12分)

某兴趣小组随机调查了某市100天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次, 整理数据得到下表(单位: 天)

| 锻炼人次 空气质量等级 | [0,200] | (200, 400] | (400, 600] |
|----------------|---------|------------|------------|
| 1 (优) | 2 | 16 | 25 |
| 2 (良) | 5 | 10 | 12 |
| 3 (轻度污染) | 6 | 7 | 8 |
| 4 (中度污染) | 7 | 2 | 0 |

(1) 分别估计该市一天的空气质量等级为 1,2,3,4 的概率;

(2) 求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值 (同一组数据用该组区间的中点值为代表);

(3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2, 则称这天“空气质量好”; 若某天的空气质量等级为 3 或 4, 则称这天“空气质量不好”. 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表, 判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

| | 人次 ≤ 400 | 人次 > 400 |
|--------|---------------|------------|
| 空气质量好 | | |
| 空气质量不好 | | |

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

| | | | |
|-----------------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
| k | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

【答案】: (1) $P_1 = \frac{43}{100}$, $P_2 = \frac{27}{100}$, $P_3 = \frac{21}{100}$, $P_4 = \frac{9}{100}$

(2) 350

(3) 有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关

【解析】: (1) $P_1 = \frac{2+16+25}{100} = \frac{43}{100}$, $P_2 = \frac{5+10+12}{100} = \frac{27}{100}$,

$P_3 = \frac{6+7+8}{100} = \frac{21}{100}$, $P_4 = \frac{7+2+0}{100} = \frac{9}{100}$

(2) $\bar{x} = \frac{(2+5+6+7) \times 100 + (16+10+7+2) \times 300 + (25+12+8) \times 500}{100} = 350$

(3) 2×2 列联表

| | 人次 ≤ 400 | 人次 > 400 | 合计 |
|--------|---------------|------------|----|
| 空气质量好 | 33 | 37 | 70 |
| 空气质量不好 | 22 | 8 | 30 |

| | | | |
|----|----|----|-----|
| 合计 | 55 | 45 | 100 |
|----|----|----|-----|

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100(33 \times 8 - 37 \times 22)^2}{70 \times 30 \times 55 \times 45} = \frac{1100}{189} \approx 5.82$$

$$\because 5.82 > 3.841$$

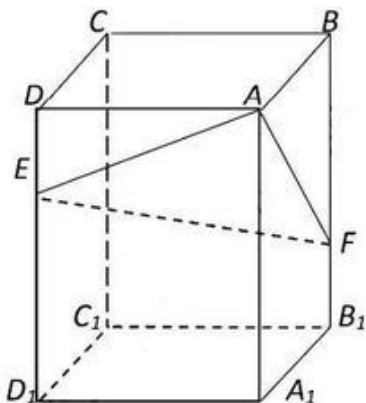
\therefore 有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关

19. (12分)

如图，长方形 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上，且 $2DE = ED_1, BF = 2FB_1$ ，证明：

(1) 当 $AB = BC$ 时， $EF \perp AC$ ；

(2) 点 C_1 在平面 AEF 内。



【解答】：(1) 因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，所以 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，而 $AC \subseteq$ 平面 $ABCD$ ，所以 $AC \perp BB_1$ 。

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，且 $AB = BC$ ，所以 $ABCD$ 正方形，

所以 $AC \perp BD$ ，又 $BD \cap BB_1 = B$ ，

所以 $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D ，又点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上，所以 $EF \subseteq$ 平面 BB_1D_1D ，

所以 $EF \perp AC$ 。

(2) 取 AA_1 靠近 A_1 的三等分点 M ，连结 DM, C_1F, MF 。

因为 E 在 DD_1 ，且 $2DE = ED_1$ ，所以 $ED \parallel AM$ ，且 $ED = AM$ ，

所以四边形 $AEDM$ 为平行四边形，所以 $DM \parallel AE$ ，且 $DM = AE$ ，

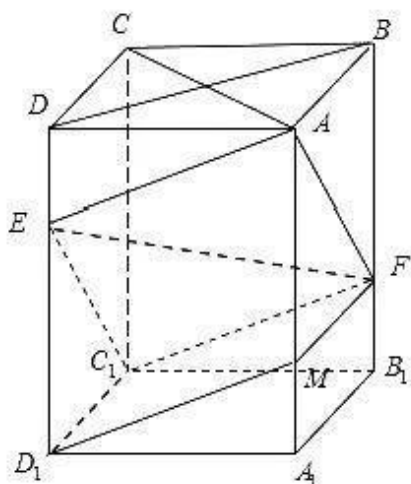
又 F 在 BB_1 上，且 $BF = 2FB_1$ ，所以 $DF \parallel A_1B_1$ ，且 $DF = A_1B_1$ ，

从而 $DF \parallel D_1C_1$ ， $DF = D_1C_1$ ，所以 D_1DFC_1 为平行四边形，

所以 $DM \parallel C_1F$ ，

所以 $AE \parallel C_1F$ ，所以 A, E, F, C_1 四点共面。

所以点 C_1 在平面 AEF 内.



20.(12分)

已知函数 $f(x) = x^3 - kx + k^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有三个零点, 求 k 的取值范围.

【解答】 解: (1) 由题意可得, 定义域为 \mathbb{R}

$$f'(x) = 3x^2 - k$$

① 当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增

② 当 $k > 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 - k$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x < -\sqrt{\frac{k}{3}} \text{ 或 } x > \sqrt{\frac{k}{3}}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{\frac{k}{3}})$ 单调递增

或 $f(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{k}{3}}, +\infty)$ 单调递增

$$f'(x) < 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{k}{3}} < x < \sqrt{\frac{k}{3}}$$

函数 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{\frac{k}{3}}, \sqrt{\frac{k}{3}})$ 上单调递减

(2) $f(x) = x^3 - kx + k^2$ 由 (1) 可知, $k \leq 0$ 时 (舍去)

$k > 0$, 由题易得 $k > 0$ 且 $f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right) > 0$, $f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right) < 0$, 解之得 $0 < k < \frac{4}{27}$

21.(12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (0 < m < 5)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$, A, B 分别为 C 的左、右顶点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若点 P 在 C 上, 点 Q 在直线 $x=6$ 上, 且 $|BP|=|BQ|$, $BP \perp BQ$, 求 $\triangle APQ$ 的面

积.

【答案】 (1) $C: \frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{25} = 1 (0 < m < 5)$ (2) $\frac{5}{2}$.

【解析】 (1) 设 $a=4t$, $c=\sqrt{15}t$, 则 $b=m=t$, 所以 $m=t$,

又 $a=4t=5$, 解得 $t=\frac{5}{4}$, 所以 $m=\frac{5}{4}$, 所以 C 的方程为 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{25} = 1 (0 < m < 5)$.

(2) 解法一: 如图

设点 $Q(6, t)$, $P(m, n)$, 又 $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$,

则 $\overline{BP} = (m-5, n)$, $\overline{BQ} = (1, t)$,

所以 $\overline{BP} \cdot \overline{BQ} = 0$, 得 $m-5+nt=0$,

过 P 作 $PK \perp x$ 轴, 所以 $\angle 1 + \angle 2 = \frac{\pi}{2}$, $\angle 1 + \angle 3 = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\angle 2 = \angle 3$, $\angle 4 = \angle 1$,

所以 $\triangle PKB \cong \triangle BQA$,

得 $KB = QG$, $PK = BG = 1$, 即 $y=1$,

所以 $P(m, 1)$, 得 $m-5+t=0$,

代入椭圆方程 $\frac{m^2}{25} + \frac{16}{25} = 1$,

解得 $m = \pm 3$,

所以 $P(3, 1)$ 或 $P(-3, 1)$; $Q(6, 2)$ 或 $Q(6, 8)$,

当 $P(3,1)$, $Q(6,2)$ 时, $|AQ| = \sqrt{125}$,

直线 AQ 的方程为: $2x - 11y + 10 = 0$, $P(3,1)$ 到直线 AQ 的距离为 $d = \frac{5}{\sqrt{125}}$,

所以 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2}|AQ|d = \frac{1}{2} \times \sqrt{125} \times \frac{5}{\sqrt{125}} = \frac{5}{2}$,

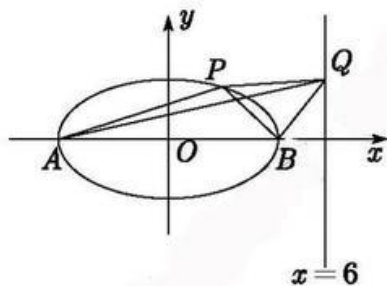
当 $P(-3,1)$, $Q(6,8)$ 时, $|AQ| = \sqrt{185}$,

直线 AQ 的方程为: $8x - 11y + 40 = 0$, $P(-3,1)$ 到直线 AQ 的距离为 $d = \frac{5}{\sqrt{185}}$,

所以 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2}|AQ|d = \frac{1}{2} \times \sqrt{185} \times \frac{5}{\sqrt{185}} = \frac{5}{2}$,

综上 $\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{5}{2}$.

解法二: 如图



设点 $Q(6,t)$, $P(m,n)$, 又 $A(-5,0)$, $B(5,0)$,

所以 $k_{PB}k_{BQ} = -1$, 得 $t \cdot \frac{n}{m-5} = -1$, ①

由 $|BP| = |BQ|$, 得 $(m-5)^2 + n^2 = t^2 + 1$, ②

由①得, $t = \frac{5-m}{n}$ 代入②得 $(m-5)^2 + n^2 = \left(\frac{5-m}{n}\right)^2 + 1$,

$(m-5)^2 n^2 + n^4 = (5-m)^2 + n^2$ 整理得,

$(m-5)^2 (n^2 - 1) = n^2 (1 - n^2)$,

即 $n = 1$,

得 $m + t - 5 = 0$,

以下解法同法一得到 $P(3,1)$, $Q(6,2)$ 或 $P(-3,1)$, $Q(6,8)$.

当 $P(3,1)$, $Q(6,2)$, $A(-5,0)$ 时,

所以 $\vec{AP} = (8,1)$, $\vec{AQ} = (11,2)$,

$$\text{所 } S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{5}{2},$$

当 $P(-3,1)$, $Q(6,8)$, $A(-5,0)$ 时,

$$\text{所以 } \vec{AP} = (2,1), \quad \vec{AQ} = (11,8),$$

$$\text{所 } S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{5}{2},$$

综上 $\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{5}{2}$.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 - t - t^2 \\ y = 2 - 3t + t^2 \end{cases}$ (t 为参数且 $t \neq 1$), C 与

坐标轴交于 A, B 两点.

(1) 求 $|AB|$;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求直线 AB 的极坐标方程.

【答案】: (1) $4\sqrt{10}$; (2) $3\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + 12 = 0$.

【解析】: (1) 当 $x=0$ 时, 求得 $t=-2$ 或 $t=1$ (舍) 代入 $y=2-3t+t^2$ 中, 求得 $y=12$;

当 $y=0$ 时, 求得 $t=2$ 或 $t=1$ (舍) 代入 $x=2-t-t^2$ 中, 求得 $x=-4$, 所以曲线与

坐标轴交于 $(0,12)$ 和 $(-4,0)$, 故 $|AB| = \sqrt{(-4)^2 + 12^2} = 4\sqrt{10}$.

(2) 由(1)得直线 AB 过点 $(0,12)$ 和 $(-4,0)$, 所以直线 AB 的解析式为 $3x - y + 12 = 0$,

故直线 AB 的极坐标方程为 $3\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + 12 = 0$.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + b + c = 0$, $abc = 1$.

(1) 证明: $ab + bc + ca < 0$;

(2) 用 $\max\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 的最大值, 证明: $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$.

【答案】：(1) 略；(2) 略。

【解析】：(1) 证明： $\because a+b+c=0, \therefore (a+b+c)^2=0$.

$\therefore a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2ca=0$, 即 $2ab+2bc+2ca=-(a^2+b^2+c^2)$

$\therefore 2ab+2bc+2ca < 0, \therefore ab+bc+ca < 0$.

证明：不妨设 $a \leq b < 0 < c < \sqrt[3]{4}$, 则 $ab = \frac{1}{c} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -a-b = c > \sqrt[3]{4}$, 而

$\sqrt[3]{4} > -a-b \geq 2\sqrt{ab} > \frac{2}{\sqrt[6]{4}} = 2^{1-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ 矛盾, 所以命题得证.

【小结】：(1) 根据题设条件 $a+b+c=0$, 两边平方, 再利用均值不等式证明即可.

(2) 假设出 a, b, c 中最大值, 根据反证法与基本不等式推出矛盾, 即可得出结论.