成都市2017级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.C; 2.D; 3.D; 4.A; 5.B; 6.C; 7.B; 8.B; 9.A; 10.D; 11.C; 12.A.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $-\frac{2}{3}$; 14. 0.54; 15. $\frac{10}{31}$; 16. 2.

三、解答题:(共70分)

17.解:(Ⅰ)该小组共有11名销售员2019年度月均销售额超过3.52万元,分别是:3.54,3.56,3.56,3.57,3.59,3.60,3.64,3.64,3.67,3.70,3.70. ……2分

∴ 月均销售额超过3.52万元的销售员占该小组的比例为 $\frac{11}{20}=55\%$. ……4分

∵$55\%<65\%$,故不需要对该销售小组发放奖励. ……5分

(Ⅱ)由题意,随机变量 X 的可能取值为1,2,3,4. ……6分

则 $P(X=1)=\frac{1}{\mathrm{A}_5^1}=\frac{1}{5}$,$P(X=2)=\frac{\mathrm{A}_4^1}{\mathrm{A}_5^2}=\frac{1}{5}$,$P(X=3)=\frac{\mathrm{A}_4^2}{\mathrm{A}_5^3}=\frac{1}{5}$,

$P(X=4)=\frac{\mathrm{A}_4^3\mathrm{A}_2^1}{\mathrm{A}_5^4}=\frac{2}{5}$. ……10分

∴ 随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

……11分

∴$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{2}{5}=\frac{14}{5}$. ……12分

18.解:(Ⅰ)在 $\triangle ABC$ 中,∵$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,

∴$(a-c)\sin C=(a-b)(\sin A+\sin B)$. ……1分

由正弦定理,得 $(a-c)c=(a-b)(a+b)$. ……2分

整理,得 $c^2+a^2-b^2=ac$. ……3分

∴ $\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$. ……4分

∴$\cos B=\frac{1}{2}$. ……5分

又 $0<B<\pi$,∴$B=\frac{\pi}{3}$. ……6分

（Ⅱ）$\because b=4$，$\therefore a^2+c^2-16=ac$，……7 分

即 $(a+c)^2-16=3ac$．……8 分

$\because ac\leqslant(\frac{a+c}{2})^2$，$\therefore(a+c)^2-16\leqslant 3(\frac{a+c}{2})^2$．……9 分

$\therefore\ \frac{1}{4}(a+c)^2\leqslant 16$．……10 分

$\therefore a+c\leqslant 8$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立．……11 分

$\therefore a+c$ 的最大值为 8．……12 分

19．解：（Ⅰ）如图，取 AD 的中点 O．连接 OM，ON．

在矩形 $ADEF$ 中，$\because$ O，M 分别为线段 AD，EF 的中点，

$\therefore OM//AF$．……1 分

又 $OM\not\subset$ 平面 ACF，$AF\subset$ 平面 ACF，

$\therefore OM//$ 平面 ACF．……2 分

在△ACD 中，$\because$ O，N 分别为线段 AD，CD 的中点，

$\therefore ON//AC$．

又 $ON\not\subset$ 平面 ACF，$AC\subset$ 平面 ACF，

$\therefore ON//$ 平面 ACF．……3 分

又 $OM\cap ON=O$，OM，$ON\subset$ 平面 MON，

$\therefore$ 平面 $MON//$ 平面 ACF．……4 分

又 $MN\subset$ 平面 MON，

$\therefore$ $MN//$ 平面 ACF．……5 分

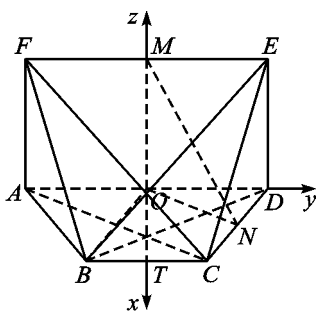
（Ⅱ）如图，取 BC 的中点 T．连接 OT．

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，O 为 AD 的中点，

$\therefore OT\perp AD$．

$\because$ 平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADEF\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$OT\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore OT\perp$ 平面 $ADEF$．……6 分



以 O 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OT}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OM}$ 方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$．

连接 OB．在△ABD 中，$\because AB\perp BD$，$AD=4$，$\therefore OB=\frac{1}{2}AD=2$．

$\because BC=2$，$\therefore BT=1$．

在 Rt△OBT 中，$OT=\sqrt{3}$．……7 分

设 $AF=h$．则 $C(\sqrt{3},1,0)$，$F(0,-2,h)$，$\overrightarrow{FC}=(\sqrt{3},3,-h)$．

取平面 $ADEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$．……8 分

$\therefore\sin<\overrightarrow{FC},\boldsymbol{n}>=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+9+h^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$．解得 $h=2$．……9 分

连接 BE .

$\therefore V_{ABCDEF}=V_{B-ADEF}+V_{B-CDE}=V_{B-ADEF}+V_{E-BDC}$

$=\frac{1}{3}S_{ADEF}\cdot OT+\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot DE=\frac{1}{3}\times 2\times 4\times\sqrt{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times 2$

$=\frac{10\sqrt{3}}{3}$. ……12 分

20. 解:(Ⅰ)当 $a=m=1$ 时, $g(x)=e^{x-1}-\ln x$. 则 $g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$. ……1 分

∵ $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $g'(1)=0$, ……2 分

∴ 当 $x\in(0,1)$ 时, $g'(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $g'(x)>0$. ……3 分

∴ $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$,单调递增区间为 $(1,+\infty)$. ……4 分

(Ⅱ)设 $h(x)=x-1-\ln x$. 则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$. ……5 分

令 $h'(x)=0$,解得 $x=1$.

∴ 当 $x\in(0,1)$ 时, $h'(x)<0$,即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;

当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $h'(x)>0$,即 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore h(x)_{\text{最小值}}=h(1)=0$. ……7 分

$\therefore x\geqslant\ln x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

现要证 $4e^{x-2}>x(1+\ln x)$,只需证 $4e^{x-2}>x^2$.

可证 $\ln(4e^{x-2})>\ln x^2$,即 $x-2+\ln 4>2\ln x$.

设 $t(x)=x-2\ln x-2+\ln 4$. ……8 分

则 $t'(x)=1-\frac{2}{x}$. ……9 分

令 $t'(x)=0$,解得 $x=2$.

∴ 当 $x\in(0,2)$ 时, $t'(x)<0$,即 $t(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减;

当 $x\in(2,+\infty)$ 时, $t'(x)>0$,即 $t(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore t(x)_{\text{最小值}}=t(2)=0$. ……11 分

$\therefore x-2+\ln 4\geqslant 2\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

综上,可知 $x\geqslant\ln x+1$,当 $x=1$ 时等号成立; $x-2+\ln 4\geqslant 2\ln x$,当 $x=2$ 时等号成立.

∴ 当 $a=4,m=2$ 时, $f(x)>x(1+\ln x)$. ……12 分

21. 解:(Ⅰ) ∵ 椭圆 C 的左焦点 $F_1(-\sqrt{3},0)$, ∴ $c=\sqrt{3}$. ……1 分

将 $Q(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,得 $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$.

又 $a^2-b^2=3$, $\therefore a^2=4,b^2=1$. ……2 分

∴ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……3 分

(Ⅱ)(i)设点 $P(x_0,y_0)$.

①当直线 PA,PB 的斜率都存在时,设过点 P 与椭圆 C 相切的直线方程为 $y=k(x-x_0)+y_0$.

由 $\begin{cases} y=k(x-x_0)+y_0 \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$,消去 y,得 $(1+4k^2)x^2+8k(y_0-kx_0)x+4(y_0-kx_0)^2-4=0$.

$\Delta=64k^2(y_0-kx_0)^2-4(1+4k^2)[4(y_0-kx_0)^2-4]$.

令 $\Delta=0$,整理得 $(4-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+1-y_0^2=0$.

设直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2. $\therefore k_1k_2=\dfrac{1-y_0^2}{4-x_0^2}$. ……4 分

又 $x_0^2+y_0^2=5$, $\therefore k_1k_2=\dfrac{1-(5-x_0^2)}{4-x_0^2}=\dfrac{x_0^2-4}{4-x_0^2}=-1$. ……5 分

$\therefore PM\perp PN$,即 MN 为圆 O 的直径, $\therefore \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\mathbf{0}$.

②当直线 PA 或 PB 的斜率不存在时,不妨设 $P(2,1)$,则直线 PA 的方程为 $x=2$.

$\therefore M(2,-1)$,$N(-2,1)$,也满足 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\mathbf{0}$. ……6 分

综上,有 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\mathbf{0}$. ……7 分

(ii)设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

当直线 PA 的斜率存在时,设直线 PA 的方程为 $y=k_1(x-x_1)+y_1$.

由 $\begin{cases} y=k_1(x-x_1)+y_1 \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$,消去 y,得 $(1+4k_1^2)x^2+8k_1(y_1-k_1x_1)x+4(y_1-k_1x_1)^2-4=0$.

$\Delta=64k_1^2(y_1-k_1x_1)^2-4(1+4k_1^2)[4(y_1-k_1x_1)^2-4]$.

令 $\Delta=0$,整理得 $(4-x_1^2)k_1^2+2x_1y_1k_1+1-y_1^2=0$.

则 $k_1=-\dfrac{x_1y_1}{4-x_1^2}=\dfrac{-x_1y_1}{4y_1^2}=\dfrac{-x_1}{4y_1}$.

$\therefore$ 直线 PA 的方程为 $y=\dfrac{-x_1}{4y_1}(x-x_1)+y_1$.化简可得 $x_1x+4y_1y=4y_1^2+x_1^2$,即 $\dfrac{x_1x}{4}+y_1y=1$.

经验证,当直线 PA 的斜率不存在时,直线 PA 的方程为 $x=2$ 或 $x=-2$,也满足 $\dfrac{x_1x}{4}+y_1y=1$. ……8 分

同理,可得直线 PB 的方程为 $\dfrac{x_2x}{4}+y_2y=1$.

$\because P(x_0,y_0)$ 在直线 PA,PB 上,$\therefore \dfrac{x_1x_0}{4}+y_1y_0=1$, $\dfrac{x_2x_0}{4}+y_2y_0=1$.

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $\dfrac{x_0x}{4}+y_0y=1$. ……9 分

由 $\begin{cases} \dfrac{x_0x}{4}+y_0y=1 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$,消去 y,得 $(3y_0^2+5)x^2-8x_0x+16-16y_0^2=0$.

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{8x_0}{3y_0^2+5}, x_1x_2=\dfrac{16-16y_0^2}{3y_0^2+5}$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+\dfrac{x_0^2}{16y_0^2}}\,|x_1-x_2|=\sqrt{\dfrac{15y_0^2+5}{16y_0^2}\left[\dfrac{64x_0^2-4(3y_0^2+5)(16-16y_0^2)}{(3y_0^2+5)^2}\right]}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}}{3y_0^2+5}\sqrt{\dfrac{3y_0^2+1}{y_0^2}(3y_0^4+y_0^2)}=\dfrac{2\sqrt{5}(3y_0^2+1)}{3y_0^2+5}$. ……10 分

又点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\sqrt{3y_0^2+1}}$.

$\therefore S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}(3y_0^2+1)}{3y_0^2+5}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{5}\sqrt{3y_0^2+1}}=\dfrac{4\sqrt{3y_0^2+1}}{3y_0^2+5}$. ……11 分

令 $\sqrt{3y_0^2+1}=t, t\in[1,4]$. 则 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{4t}{t^2+4}=\dfrac{4}{t+\dfrac{4}{t}}$.

又 $t+\dfrac{4}{t}\in[4,5]$，$\therefore$ $\triangle OAB$ 的面积的取值范围为 $[\dfrac{4}{5},1]$. ……12 分

22.解：(Ⅰ)由直线 l 的参数方程，消去参数 t，得直线 l 的普通方程为 $x-y+4=0$.

……3 分

由 $\rho^2=x^2+y^2, \rho\cos\theta=x$，得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2+6x-a=0$.

……5 分

(Ⅱ)将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程，并整理，得

$t^2+\dfrac{5\sqrt{2}}{3}t-\dfrac{64}{9}-a=0$.…(*) ……6 分

设 t_1,t_2 是方程(*)的两个根，则有 $\Delta>0, t_1+t_2=-\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$，$t_1t_2=-(\dfrac{64}{9}+a)$.

……7 分

由题意，不妨设 $t_1=-2t_2$. ……8 分

$\therefore t_2^2=\dfrac{32}{9}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{50}{9}$. ……9 分

解得 $a=4$，符合条件 $a>0$. $\therefore a=4$. ……10 分

23.解：(Ⅰ)不等式 $f(x)<x$ 即 $|x-1|-|x+2|<x$.

①当 $x\geqslant 1$ 时，化简得 $-3<x$. 解得 $x\geqslant 1$； ……1 分

②当 $-2<x<1$ 时，化简得 $-2x-1<x$. 解得 $-\dfrac{1}{3}<x<1$； ……2 分

③当 $x\leqslant -2$ 时，化简得 $3<x$. 此时无解. ……3 分

综上,所求不等式的解集为 $\{x \mid x > -\frac{1}{3}\}$. ……4 分

(Ⅱ)∵ $|x-1|-|x+2| \leqslant |(x-1)-(x+2)|=3$,当且仅当 $x \leqslant -2$ 时等号成立.

∴$M=3$. 即 $a+4b+9c=1$. ……6 分

∵ $\frac{1-9c}{ab}+\frac{a-3c}{ac}=\frac{a+4b}{ab}+\frac{1}{c}-\frac{3}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, ……7 分

又 $a,b,c>0$,

∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(a+4b+9c) \geqslant (\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{4b}+\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{9c})^2$

……8 分

$=(1+2+3)^2=36$. ……9 分

当且仅当 $\frac{\frac{1}{a}}{a}=\frac{\frac{1}{b}}{4b}=\frac{\frac{1}{c}}{9c}$ 时取等号.

∴ $\frac{1-9c}{ab}+\frac{a-3c}{ac}$ 的最小值为 36. ……10 分