

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

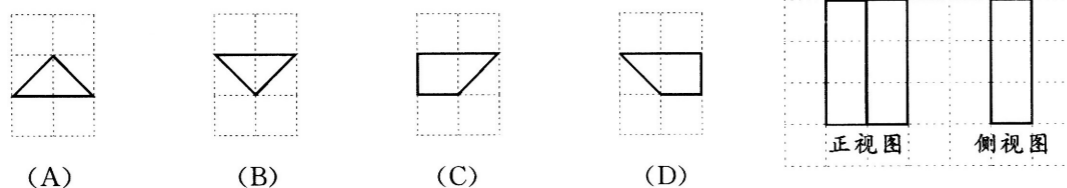
1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{0, x\}$, $B = \{0, 2, 4\}$. 若 $A \subseteq B$, 则实数 x 的值为
(A) 0 或 2 (B) 0 或 4 (C) 2 或 4 (D) 0 或 2 或 4
2. 若复数 z 满足 $zi = 2 + 5i$ (i 为虚数单位), 则 z 在复平面上对应的点的坐标为
(A) (2, 5) (B) (2, -5) (C) (-5, 2) (D) (5, -2)
3. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 \leq 0$ ”的否定是
(A) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 > 0$ (B) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$
(C) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 \geq 0$ (D) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 > 0$

4. 如图是某几何体的正视图和侧视图, 则该几何体的俯视图不可能是



5. 已知函数 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, 则 $f(\log_2 3) =$
(A) 2 (B) $\frac{8}{3}$ (C) 3 (D) $\frac{10}{3}$

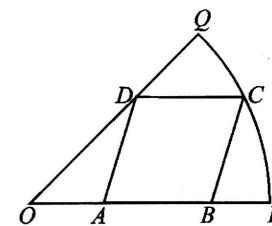
6. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ y - 2 \geq 0, \\ x + y - 5 \leq 0. \end{cases}$ 则 $z = 2x + y$ 的最大值为
(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

7. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_n a_{n+1} = 9^n$, 则该数列的公比是
(A) -3 (B) 3 (C) ± 3 (D) 9

8. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$, 则“ $a > -1$ ”是“ $f(a) > f(-1)$ ”的
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点, 经过点 F_2 且与 x 轴垂直的直线与双曲线的一条渐近线相交于点 A , 且 $\frac{\pi}{6} \leq \angle F_1 A F_2 \leq \frac{\pi}{4}$. 则该双曲线离心率的取值范围是
(A) $[\sqrt{5}, \sqrt{13}]$ (B) $[\sqrt{5}, 3]$ (C) $[3, \sqrt{13}]$ (D) $[\sqrt{7}, 3]$

10. 为迎接大运会的到来, 学校决定在半径为 $20\sqrt{2}$ m, 圆心角为 $\frac{\pi}{4}$ 的扇形空地 OPQ 的内部修建一平行四边形观赛场地 $ABCD$, 如图所示. 则观赛场地的面积最大值为
(A) 200m^2 (B) $400(2 - \sqrt{2})\text{m}^2$
(C) $400(\sqrt{3} - 1)\text{m}^2$ (D) $400(\sqrt{2} - 1)\text{m}^2$



11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, P 在底面 ABC 上的投影为 AC 的中点 D , $DP = DC = 1$. 有下列结论:
① 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱长均相等;
② $\angle PAB$ 的取值范围是 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$;
③ 若三棱锥的四个顶点都在球 O 的表面上, 则球 O 的体积为 $\frac{2\pi}{3}$;
④ 若 $AB = BC$, E 是线段 PC 上一动点, 则 $DE + BE$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

其中正确结论的个数是

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
12. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) - 1 (A > 0, 0 < \omega < 1)$, $f(\frac{\pi}{8}) = f(\frac{5\pi}{8})$, 且 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{3\pi}{4})$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$. 若对任意的 $x_1, x_2 \in [0, t]$, 都有 $2f(x_1) \geq f(x_2)$ 成立, 则实数 t 的最大值是
(A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{7\pi}{12}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, \lambda)$, $\mathbf{b} = (2, 3)$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则实数 λ 的值为 _____.

14. 某实验室对小白鼠体内 x, y 两项指标进行研究, 连续五次实验所测得的这两项指标数据如下表:

x	120	110	125	130	115
y	92	83	90	96	89

已知 y 与 x 具有线性相关关系, 利用上表中的五组数据求得回归直线方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$. 若下一次实验中 $x = 170$, 利用该回归直线方程预测得 $\hat{y} = 117$, 则 \hat{b} 的值为 _____.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1, S_5 = 35$, 且 $\frac{2S_n}{n} = \frac{S_{n-1}}{n-1} + \frac{S_{n+1}}{n+1}$ ($n \geq 2$ 且

$n \in \mathbf{N}^*$), 则 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{10} a_{11}}$ 的值为 _____.

16. 已知点 F 为抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, 经过点 F 且倾斜角为 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 的直线与抛物线相交于 A, B 两点, $\triangle OAB$ (O 为坐标原点) 的面积为 $2 \sin^3 \alpha$, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 M . 则 $|FM|$ 的值为 _____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

某公司为加强对销售员的考核与管理, 从销售部门随机抽取了 2019 年度某一销售小组的月均销售额, 该小组各组员 2019 年度的月均销售额(单位: 万元)分别为: 3.35, 3.35, 3.38, 3.41, 3.43, 3.44, 3.46, 3.48, 3.51, 3.54, 3.56, 3.56, 3.57, 3.59, 3.60, 3.64, 3.64, 3.67, 3.70, 3.70.

(I) 根据公司人力资源部门的要求, 若月均销售额超过 3.52 万元的组员不低于全组人数的 65%, 则对该销售小组给予奖励, 否则不予奖励. 试判断该公司是否需要对抽取的销售小组发放奖励;

(II) 在该销售小组中, 已知月均销售额最高的 5 名销售员中有 1 名的月均销售额造假. 为找出月均销售额造假的组员, 现决定请专业机构对这 5 名销售员的月均销售额逐一进行审核, 直到能确定出造假组员为止. 设审核次数为 X , 求 X 的分布列及数学期望.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $(a-c)\sin(A+B) = (a-b)(\sin A + \sin B)$.

(I) 求角 B 的大小;

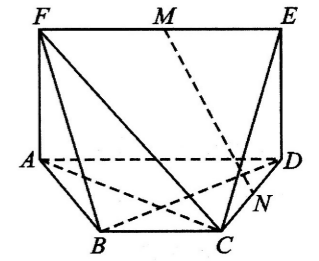
(II) 若 $b = 4$, 求 $a + c$ 的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, $ADEF$ 为矩形, $ABCD$ 为等腰梯形, $BC \parallel AD$, $BC = 2$, $AD = 4$, 且 $AB \perp BD$, 平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, M, N 分别为 EF, CD 的中点.

(I) 求证: $MN \parallel$ 平面 ACF ;

(II) 若直线 FC 与平面 $ADEF$ 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 求多



面体 $ABCDEF$ 的体积.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ae^{x-m}$, 其中 $a, m \in \mathbf{R}$.

(I) 当 $a = m = 1$ 时, 设 $g(x) = f(x) - \ln x$. 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $a = 4, m = 2$ 时, 证明: $f(x) > x(1 + \ln x)$.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, 点 $Q(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 C 上.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 经过圆 $O: x^2 + y^2 = 5$ 上一动点 P 作椭圆 C 的两条切线, 切点分别记为 A, B , 直线 PA, PB 分别与圆 O 相交于异于点 P 的 M, N 两点.

(i) 求证: $\vec{OM} + \vec{ON} = \mathbf{0}$;

(ii) 求 $\triangle OAB$ 的面积取值范围.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = -\frac{8}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标

原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 6\rho \cos \theta = a$, 其中 $a > 0$.

(I) 写出直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 在平面直角坐标系 xOy 中, 设直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点. 若点 $P(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ 恰为线段 AB 的三等分点, 求 a 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x-1| - |x+2|$.

(I) 求不等式 $f(x) < x$ 的解集;

(II) 记函数 $f(x)$ 的最大值为 M . 若正实数 a, b, c 满足 $a+4b+9c = \frac{1}{3}M$, 求 $\frac{1-9c}{ab} + \frac{a-3c}{ac}$ 的最小值.